Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 8

Abgabe am **05.12.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Gradientenvektorfelder und Hesseform (1 + 1 + 2 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass es genau ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ (der *Gradient* von f) auf M gibt, sodass

$$g(\operatorname{grad} f, X) = X(f)$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{grad} f$ senkrecht auf den Niveaumengen in

$$U = \{p \in M |\ (\operatorname{grad} f)_p \neq 0\}$$

steht.

(c) Zeigen Sie, dass die *Hesseform* definiert durch

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) := g(\nabla_X(\operatorname{grad} f), Y)$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein symmetrisches Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$ ist.

Aufgabe 2: Konforme Deformation (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Eine Metrik der Form $\tilde{g} = e^{2f} g$ nennen wir *konforme Deformation* von g.

Zeigen Sie, dass für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇ und $\tilde{\nabla}$ von g bzw. $\tilde{g}$ und Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y + (Yf) \cdot X - g(X, Y) \cdot \operatorname{grad} f.$$

Aufgabe 3: Isometrien und Geodäten (4 Punkte)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $\|\dot{c}\|$ konstant.
Wir betrachten einen Diffeomorphismus $\Phi : M \to M$, sodass

$$g_{\Phi(p)}(D_p\Phi(v), D_p\Phi(w)) = g_p(v, w)$$

für alle $p \in M$ und $v, w \in T_pM$. Ein solches Φ heißt *Isometrie.*

Angenommen es gilt

$$\{p \in M :\ \Phi(p) = p\} = c(I).$$

Zeigen Sie, dass c eine Geodäte ist.

Aufgabe 4: Hyperbolische Ebene ($1+1+1+1$ Punkte)

Die *Poincaré-Halbebene* ist der Raum $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit Riemannscher Metrik

$$g_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} g_{\text{eukl}} \,.$$

(a) Finden Sie hinreichend viele Isometrien, um jeden Punkt auf einen beliebigen anderen abbilden zu können.

(b) Geben Sie eine Isometrie an, die genau die y-Achse fixiert.

(c) Finden Sie weiter eine Isometrie, die genau die Punkte in $\mathbb{H}$ auf dem Kreis mit (euklidischem) Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$ fixiert.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Isometrien und Aufgabe 3 alle Geodäten. Zeichnen Sie typische Geodäten von $\mathbb{H}$.

Bonusaufgabe: Der Raum der Skalarprodukte ($1+1+2$ Bonuspunkte)

Wir betrachten den Vektorraum

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A\}$$

der symmetrischen $n \times n$-Matrizen und die Teilmenge

$$S = \{A \in V \mid A \text{ hat nur positive Eigenwerte}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $S \subset V$ ist offen.

(b) Wenn man TS mit $S \times V$ identifiziert, so ist

$$g((a,v),(a,w)) = \operatorname{tr}(va^{-1}wa^{-1})$$

eine Riemannsche Metrik auf S.

(c) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ wirkt durch

$$\mathrm{GL}_n\mathbb{R} \times S \ni (h,a) \mapsto hah^T \in S$$

transitiv und isometrisch auf S.