Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer

WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 10

Abgabe am **19.12.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Veronese-Einbettung (1 + 1 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die *Veronese-Einbettung*

$$\rho : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^{3\times 3},\ [u] \mapsto u \cdot u^T$$

wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein Repräsentant ist. Der Raum $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle P, Q\rangle = \operatorname{tr}(P^T Q), \quad \text{für } P,\, Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ausgestattet.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $[u], [w] \in \mathbb{R}P^2$ gilt:

$$0 \le \operatorname{tr}(\rho[u]^T \rho[w]) = \langle \rho[u], \rho[w]\rangle \le 1.$$

(b) Wir betrachten für $[w] \in \mathbb{R}P^2$ die Teilmenge

$$L_{[w]} = \{[u] \in \mathbb{R}P^2 |\ \langle \rho[u], \rho[w]\rangle = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$L_{[w]} = \{[u] \in \mathbb{R}P^2 |\ \langle u, w\rangle_{\text{eukl}} = 0\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\rho(L_{[w]})$ eine *total geodätische Untermannigfaltigkeit* von $\rho(\mathbb{R}P^2)$ ist, d.h. Geodäten in $\rho(L_{[w]})$ sind Geodäten in $\rho(\mathbb{R}P^2)$.

Aufgabe 2: Christoffel-Symbole und Immersionen (4 Punkte)

Sei $h : M \to N$ eine Riemannsche Immersion und seien x, y Koordinaten wie in Lemma §4.2. Zeigen Sie, dass für die entsprechenden Christoffel-Symbole gilt:

$${}^M\Gamma^k_{ij}(p) = {}^N\Gamma^k_{ij}(h(p)),$$

für i, j, $k \le m = \dim M$ und $p \in M$.

Aufgabe 3: Metrikenvergleich (2 + 2 Punkte)

(a) Für die Riemannsche Metrik $g_{\mathbb{S}^l}$ auf $\mathbb{S}^l \subset \mathbb{R}^{l+1}$, die von der Riemannschen Metrik g_{eukl} auf $\mathbb{R}^{l+1}$ induziert wird, gilt für die entsprechende Metrik d auf $\mathbb{S}^l$ die Identität

$$\cos(d(p, q)) = \langle p, q\rangle_{\text{eukl}}.$$

(b) Wir benutzen dieselben Notationen wie in Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9. Sei d die von der Riemannschen Metrik g induzierte Metrik auf $\mathbb{H}^l$. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\cosh d(p, q) = -\beta(p, q)$$

gilt.

Aufgabe 4: Poincaré-Scheibe ($\mathbf{1+1+1+1}$ Punkte)

Wir betrachten das *obere-Halbebene-Modell* der *hyperbolischen Ebene* $\mathbb{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g_{\mathbb{U}} = \frac{1}{y^2} g_{\text{eukl}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi(x,y) = \frac{\big(2x, 1 - x^2 - y^2\big)}{x^2 + (1-y)^2}$$

die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 < 1\}$$

diffeomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{U}$ abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Pullbackmetrik $g_{\mathbb{D}^2} := \varphi^* g_{\mathbb{U}}$ auf $\mathbb{D}^2$ durch

$$\frac{4(dx \otimes dx + dy \otimes dy)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$$

gegeben ist.

(c) Was sind die Geodäten in $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, die durch den Ursprung $(0,0)$ laufen?

(d) Zeigen Sie in einem der beiden Modelle, dass die hyperbolische Ebene vollständig ist.

Bonusaufgabe: Hyperbolische stereographische Projektion ($\mathbf{1+1+2}$ Bonuspunkte)

Sei $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ das *Hyperboloid-Modell* der *hyperbolischen Ebene* wie in Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9 mit Riemannscher Metrik $g_{\mathbb{H}^2}$. Die stereographische Projektion π bezüglich $(-1,0,0)$ von $\mathbb{H}^2$ auf $\mathbb{D}^2 \cong \{0\} \times \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\mathbb{H}^2 \ni x \mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1 + x_0} \in \mathbb{D}^2.$$

(a) Veranschaulichen Sie die stereographische Projektion.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$ ein Diffeomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Pullbackmetrik $\pi^* g_{\mathbb{D}^2}$ mit der Metrik $g_{\mathbb{H}^2}$ auf $\mathbb{H}^2$ übereinstimmt.