Prof. Dr. Linus Kramer
Raphael Reinauer WWU Münster
WS 19/20

Differentialgeometrie I

Blatt 1

Abgabe am **17.10.2019** bis **8:15 Uhr** im Briefkasten **Nr. 37**

Aufgabe 1: Abschneidefunktion (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mit } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}} & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

glatt ist, d.h. beliebig oft differenzierbar.

Konstruieren Sie daraus eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $g|_{(-\infty,0]} \equiv 0$ und $g|_{[1,\infty)} \equiv 1$.

Aufgabe 2: Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ genau dann offen ist, wenn sie sich als abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen schreiben lässt.

Gilt eine ähnliche Aussage für abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3: Graph einer glatten Abbildung (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion.

Zeigen Sie, dass der Graph

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : \ x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist.

Was ist die Dimension von $\Gamma(f)$?

Aufgabe 4: Untermannigfaltigkeiten (1 + 2 + 1 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Mengen eingebettete Untermannigfaltigkeiten der gegebenen euklidischen Räume sind, und bestimmen Sie ihre Dimension:

(a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{\text{invertierbare } n \times n\text{-Matrizen}\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$

(b) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$

(c) $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{dist}(x, S_R) = r\} \subset \mathbb{R}^3$ für $R > r > 0$ und $S_R = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$. Skizzieren Sie die Menge T.

Bonusaufgabe: Orthogonale Gruppe (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \ A^T A = \mathrm{Id}_n\}$$

eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Hinweis: Finden Sie eine Abbildung in den $n(n+1)/2$-dimensionalen Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.