# §4 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

1. <u>Def</u> Seien $X, Y$ top. Räume, $A \subseteq X$ Teilmenge. Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$ heißen <u>homotop relativ zu $A$</u>, <u>$f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$</u>, falls es $f : X \times [0,1] \to Y$ stetig gibt mit

(i) $f(u,0) = f_0(u)$, $f(u,1) = f_1(u)$ für alle $u \in X$

(ii) $f(a,t) = f(a,0)$ für alle $t \in [0,1]$

<u>Bem.</u> · Aus (ii) folgt $f_0(a) = f_1(a)$ für alle $a \in A$

· Ist $A = \emptyset$, so ist (ii) ohne Bedeutung und man sagt, $f_0, f_1$ sind <u>homotop</u>.

<u>Idee:</u> $f_0$ läßt sich stetig in $f_1$ deformieren (und bleibt dabei konstant auf $A$).

Schreibe kurz <u>$f_s(u) = f(u,s)$</u>.

<u>Lemma</u> (a) $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$ und $f_1 \simeq f_2 \text{ rel } A$ $\Rightarrow f_0 \simeq f_2 \text{ rel } A$

(b) $f_0 \simeq f_0 \text{ rel } A$ ist immer wahr.

(c) $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A \Leftrightarrow f_1 \simeq f_0 \text{ rel } A$

Homotopie rel $A$ ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$. #

Beweis (a) Sei $F : X \times [0,1] \to Y$ stetig,
$\tilde{F} : X \times [0,1] \to Y$

$F(u,0) = f_0(u)$
$F(u,1) = f_1(u) = \tilde{F}(u,0)$
$\tilde{F}(u,1) = f_2(u)$

$F(a,s) = f_0(a) = \tilde{F}(a,s)$ für alle $s \in [0,1]$, $a \in A$.

Setze $\tilde{\tilde{F}}(u,s) = \begin{cases} F(u,2\cdot s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \tilde{F}(u, 2\cdot s - 1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{F}}$ stetig nach §1.2 $\Rightarrow f_0 \simeq f_2$ rel $A$ □

(b), (c) sind einfach. □

Beobachtung. Sind $X \overset{f_0}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$ stetige Abbildungen, $f_0 \simeq f_1$ rel $A$, so gilt $h \circ f_0 \simeq h \circ f_1$ rel $A$. □

Ähnlich: $f_0 \circ g \simeq f_1 \circ g$

## 2. Die Fundamentalgruppe

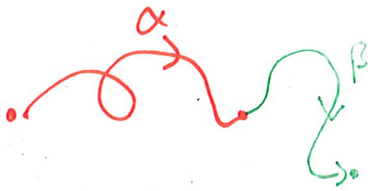
Sei $X$ ein top. Raum, seien

$\alpha : [0,1] \to X$
$\beta : [0,1] \to X$

stetig mit $\alpha(1) = \beta(0)$.

Wir definieren $\alpha * \beta : [0,1] \to X$, $\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

stetig nach §1.12.



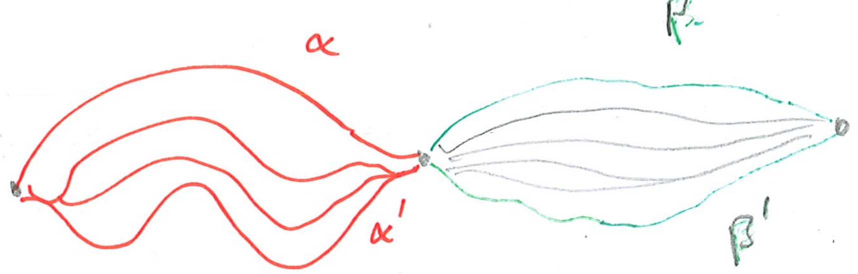

(*) Ist $\alpha' \simeq \alpha$ rel $\{0,1\}$
$\beta' \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$
so gilt $\alpha' * \beta' \simeq \alpha * \beta$ rel $\{0,1\}$

denn: ist $\hat{\alpha} : [0,1] \times [0,1] \to X$
$\hat{\beta} : [0,1] \times [0,1] \to X$
stetig, $\hat{\alpha}(t,0) = \alpha(t)$
$\hat{\alpha}(t,1) = \alpha'(t)$
$\hat{\beta}(t,0) = \beta(t)$
$\hat{\beta}(t,1) = \beta'(t)$

$\hat{\alpha}(c,s) = \alpha(c)$ $c = 0,1$, $s \in [0,1]$
$\hat{\beta}(c,s) = \beta(c)$

so folgt: $(t,s) \longmapsto (\hat{\alpha}_s * \hat{\beta}_s)(t)$ ist

Homotopie zwisch. $\alpha * \beta$ und $\alpha' * \beta'$ rel $\{0,1\}$




Für $\alpha \in C([0,1], X)$ definieren wir $[\alpha] =$

$\{\alpha' \in C([0,1], X) \mid \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0,1\}\}$

Für $\alpha' \in [\alpha]$ gilt also insbesondere $\alpha'(0) = \alpha(0)$
$\alpha'(1) = \alpha(1)$

Weiter definieren wir $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ und für $u \in X$ setzen wir $\underbrace{\varepsilon_u(t) = u}_{\text{konstanter Weg.}}$, $t \in [0,1]$

<u>Lemma A</u> Sei $\alpha, \beta, \gamma \in C([0,1], X)$ mit

$\alpha(0) = u$, $\alpha(1) = v$ $\alpha(1) = \beta(0)$ $\beta(1) = \gamma(0)$.

Dann gilt:

(a) $[\varepsilon_u * \alpha] = [\alpha]$

(b) $[\alpha * \varepsilon_v] = [\alpha]$

(c) $[\alpha * \bar{\alpha}] = [\varepsilon_u]$

(d) $[\bar{\alpha} * \alpha] = [\varepsilon_v]$

(e) $[\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$

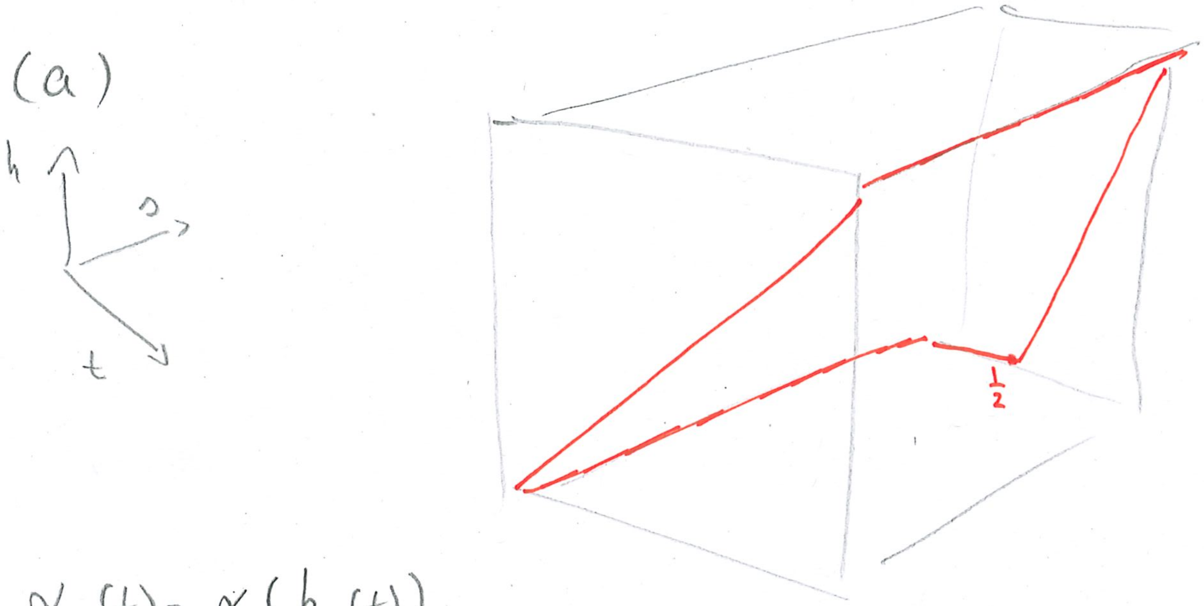
**Beweis** Wir wählen geeignete stetige Funktion

$h : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, die wir vorgeben auf dem Rand

$D \subseteq (\{0,1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{0,1\}) \subseteq [0,1]\times[0,1]$ wie folgt

(und deren Existenz mit Tietze oder auch explizit folgt)

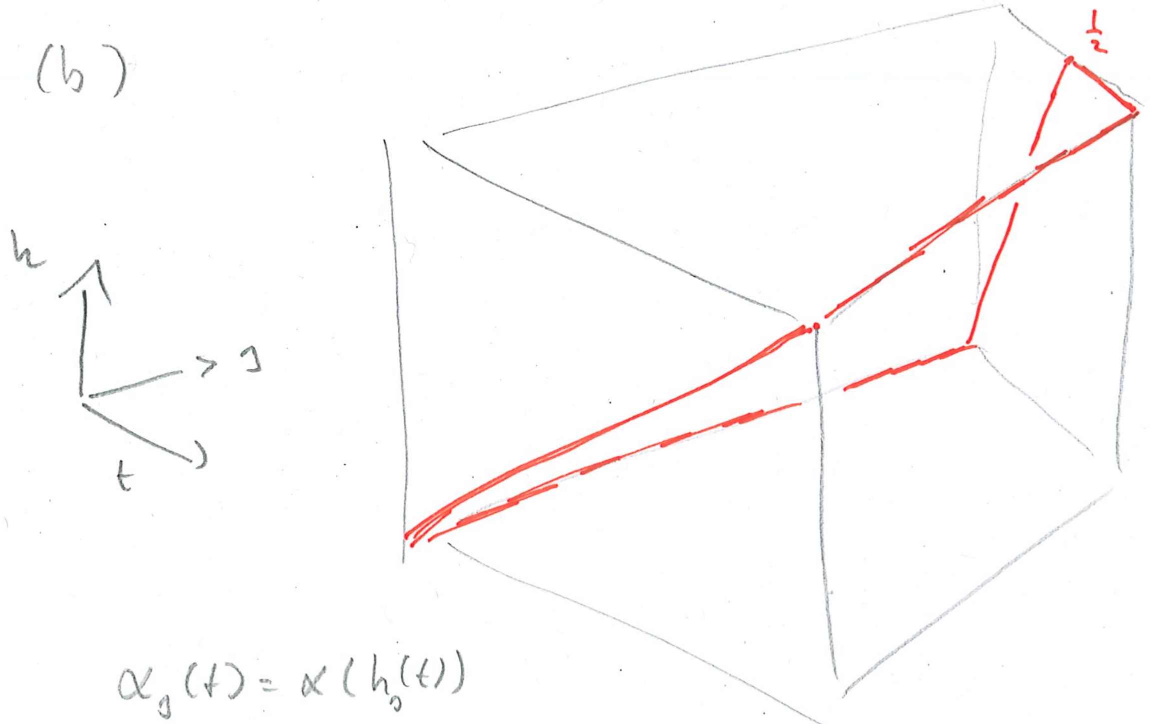
(a)




$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha \quad , \quad \alpha_1 = \varepsilon_u * \alpha \qquad\qquad \alpha_s(0) = \alpha(0) \qquad \alpha_s(1) = \alpha(1)$

(b)

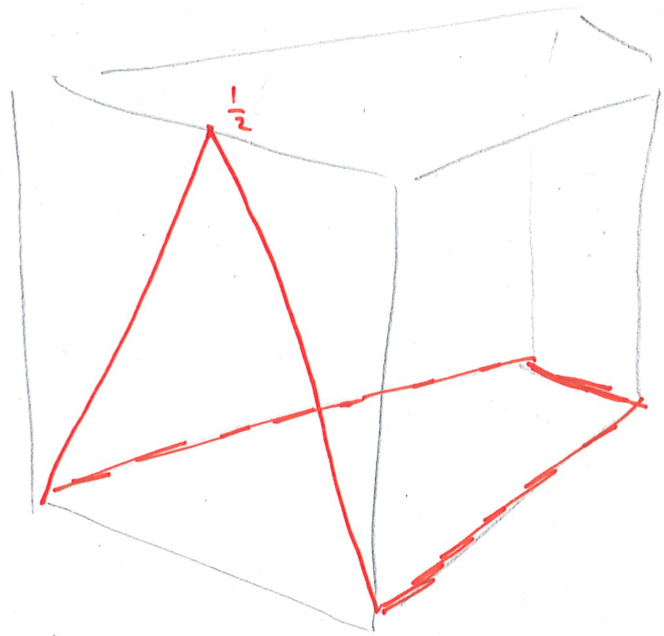



$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$

$\alpha_0 = \alpha \qquad\qquad \alpha_s(0) = \alpha(0)$

$\alpha_1 = \alpha * \varepsilon_v \qquad\qquad \alpha_s(1) = \alpha(1)$

(c)


$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$

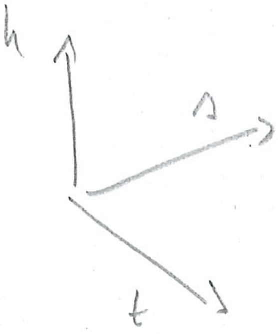
$\alpha_0 = \alpha * \overline{\alpha}$

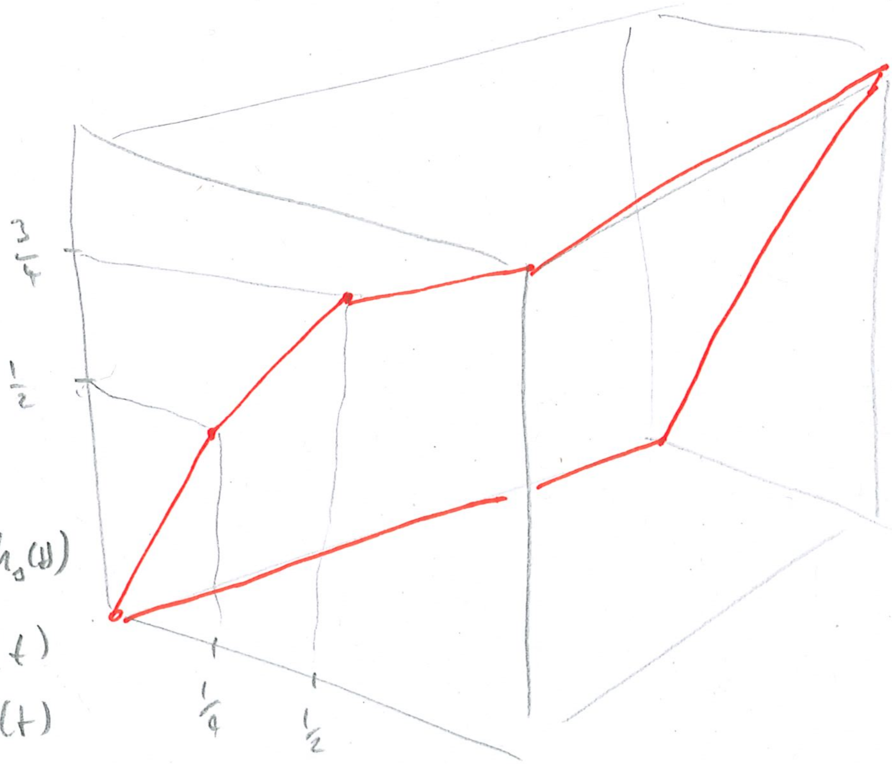
$\alpha_1 = \varepsilon_u$ $\qquad \alpha_s(0) = \alpha(0)$

$\qquad \alpha_s(1) = \alpha(1)$

(d) Folgt aus (c) wegen $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

(e)




$\delta_s(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(h_s(t))$

$\delta_0(t) = (\alpha * \beta) * \gamma(t)$

$\delta_1(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(t)$

$\delta_s(0) = \alpha(0)$

$\delta_s(1) = \gamma(1)$

$\delta_0(\frac{1}{4}) = \alpha(1)$

$\delta_0(\frac{1}{2}) = \beta(1)$

$\square$

**Lemma B** Ist $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in C([0,1], X)$

mit $\alpha(1) = \beta(0)$ sowie $\alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0,1\}$

$\beta \simeq \beta'$ rel $\{0,1\}$

so gilt $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ rel $\{0,1\}$, vgl. Beobachtung vorne, ⊛ □

**Theorem** Sei $X$ ein topologischer Raum, sei $u \in X$.

Sei $\pi_1(X,u) = \{ [\alpha] \mid \alpha : [0,1] \to X$ stetig, $\alpha(0) = u = \alpha(1) \}$

Dann ist $\pi_1(X,u)$ eine Gruppe mit Verknüpfung

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$ und Neutralelement $[\varepsilon_u]$.

Das Inverse von $[\alpha]$ ist $[\bar{\alpha}]$, $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.

Man nennt $\pi_1(X,u)$ die Fundamentalgruppe von $X$ (in $u$)

**Beweis** Die Verknüpfung $*$ ist wohldefiniert nach

Lemma B: $\alpha' \in [\alpha]$, $\beta' \in [\beta] \Rightarrow [\alpha * \beta] = [\alpha' * \beta']$.

Sie ist assoziativ nach Lemma A (e) mit Neutralelement $[\varepsilon_u]$ nach Lemma A (a), (b) und das Inverse von $[\alpha]$ ist $[\bar{\alpha}]$ nach Lemma A (c), (d). □

Wie weit hängt $\pi_1(X,u)$ von der Wahl von $u$ ab?

Ist $\alpha(1) = \beta(0)$, so definieren wir wie oben $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

**3. Satz** Sei $X$ ein topologischer Raum, sei $\lambda : [0,1] \to X$ stetig, $\lambda(0) = u$, $\lambda(1) = v$.

Für $[\alpha] \in \pi_1(X,u)$ setze $f_\lambda([\alpha]) = [\bar\lambda * (\alpha * \lambda)]$ $= [\bar\lambda] * [\alpha] * [\lambda]$. Dann ist $f_\lambda$ ein Gruppenisomorphismus $f_\lambda : \pi_1(X,u) \to \pi_1(X,v)$ mit Inversem $f_{\bar\lambda}$.

**Bew.** Für $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,u)$ gilt

$$\begin{aligned} f_\lambda([\alpha]) * f_\lambda([\beta]) &= [\bar\lambda] * [\alpha] * [\lambda] * [\bar\lambda] * [\beta] * [\lambda] \\ &= [\bar\lambda] * [\alpha] * [\varepsilon_u] * [\beta] * [\lambda] \\ &= [\bar\lambda] * [\alpha] * [\beta] * [\lambda] \\ &= f_\lambda([\alpha] * [\beta]). \end{aligned}$$

Sowie $f_{\bar\lambda} \circ f_\lambda [\alpha] = [\lambda] * [\bar\lambda] * [\alpha] * [\lambda] * [\bar\lambda] = [\alpha]$

genauso $f_\lambda \circ f_{\bar\lambda} [\gamma] = [\gamma]$ für $[\gamma] \in \pi_1(X,v)$. $\square$

**4. Def** Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ heißt **wegzusammenhängend** oder **0-zusammenhängend**, wenn gilt: zu $u,v \in X$ gibt es stets $\lambda : [0,1] \to X$ stetig mit $\lambda(0) = u$, $\lambda(1) = v$.


Da $[0,1]$ zush. ist, ist auch $\lambda([0,1])$ zush.

Also: $X$ wegzush. $\Rightarrow$ $X$ zush.

Die Umkehrung ist falsch.

#

5. **Beispiel** $\pi_1(\mathbb{R}^m, u) = \{[\varepsilon_u]\}$ für alle $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$.

Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^m$ ist trivial.

**Beweis** Sei $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{R}^m, u)$. Definiere

$h_s(t) = s \cdot u + (1-s)\alpha(t) \leadsto h_s(0) = u = h_s(1)$ sowie

$h_0 = \alpha$, $h_1 = \underset{\text{konstanter Weg}}{\varepsilon_u} \leadsto [\alpha] = [\varepsilon_u]$. $\square$

6. **Def + Satz** Sei $f : X \to Y$ stetig. Für $\alpha : [0,1] \to X$ stetig setze wir $f_\#([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

Ist $g : Y \to Z$ auch stetig, so folgt $(g \circ f)_\# [\alpha] = g_\#(f_\#([\alpha]))$, d.h. $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

**Satz** Für jedes $u \in X$ ist $f_\#$ ein Gruppenhomomorphismus

$$f_\# : \pi_1(X, u) \to \pi_1(Y, v) \quad \text{mit } v = f(u).$$

**Beweis** $f_\#([\alpha] * [\beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)]$
$= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = f_\#([\alpha]) * f_\#([\beta])$. $\square$

**Satz** Ist $f \simeq \tilde{f}$ rel $\{u\}$ für $u \in X$, so gilt für alle $[\alpha] \in \pi_1(X, u)$, dann

$$f_\#([\alpha]) = \tilde{f}_\#([\alpha])$$

**Beweis** Es gilt $f \circ \alpha \simeq \tilde{f} \circ \alpha$ rel $\{0,1\}$ und damit $[f \circ \alpha] = [\tilde{f} \circ \alpha]$. $\square$

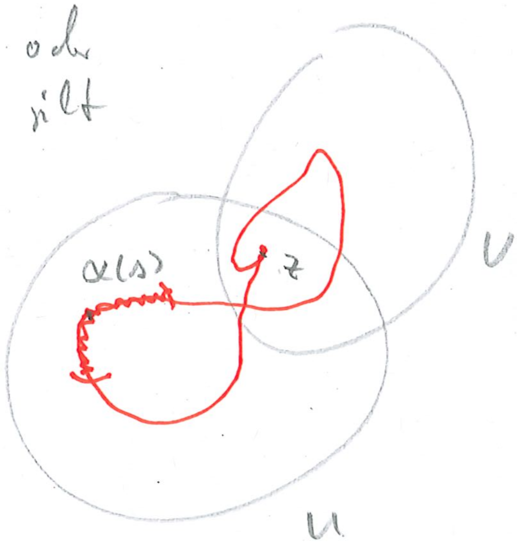
7. <u>Satz</u> (Kleiner Satz von Seifert-van Kampen)

⌈H. Seifert, 1907 – 1996, dt. Topologe
E. van Kampen, 1908 – 1942, niederl. Topologe ⌋

Sei $X$ ein top. Raum, seien $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$, sei $z \in U \cap V$. Wenn $U \cap V$ wegzush. ist, dann wird die Gruppe $\pi_1(X, z)$ erzeugt von $i_\#(\pi_1(U, z))$ und $j_\#(\pi_1(V, z))$, wobei $i: U \hookrightarrow X$ und $j: V \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildungen sind.

<u>Beweis</u> Sei $\alpha: [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1) = z$. Zu jedem $s \in [0,1]$ gibt es $\varepsilon_s > 0$ so, dass

$\alpha(t) \in U$ für $|t-s| \le \varepsilon$ oder
$\alpha(t) \in V$ für $|t-s| \le \varepsilon$ gilt




Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es folglich $m \in \mathbb{N}$ und

$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_m = 1$

so, dass $\alpha[s_k, s_{k+1}] \subseteq U$
oder $\alpha[s_k, s_{k+1}] \subseteq V$ gilt.

Ist $\alpha(s_k) \notin U \cap V$, so können wir $s_k$ in der Unterteilung weglassen, denn etwa: $s_k \in U - V$

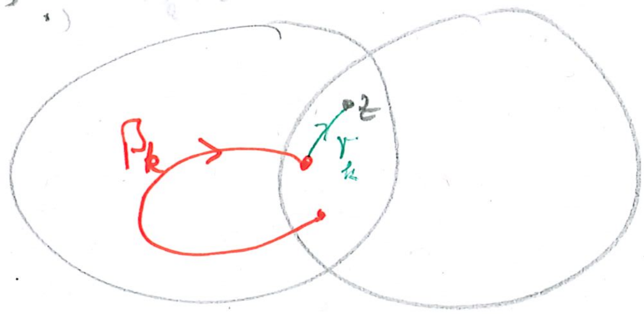
$\Rightarrow \alpha([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U$ und $\alpha([s_k, s_{k+1}]) \subseteq U$.

Also OE $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$ mit $s_i \in U \cap V$ für alle $i = 0, \dots, m$. Setze jetzt

$$\beta_k(t) = \alpha(t \cdot s_k + (1-t) \cdot s_{k-1}) \qquad k = 1, \dots, m$$

$$\leadsto \quad [\alpha] = [\beta_1] * [\beta_2] * \dots * [\beta_m].$$

Da $U \cap V$ wegzush. ist, gibt es $\gamma_k : [0,1] \to U \cap V$ mit $\gamma_k(1) = z$, $\gamma_k(0) = \beta_k(1)$.




Dann gilt

$$[\alpha] = \underbrace{[\beta_1] * [\gamma_1]}_{\text{Weg in } U \text{ oder } V} * \underbrace{[\bar\gamma_1] * [\beta_2] * [\gamma_2]}_{\text{Weg in } U \text{ oder } V} * [\bar\gamma_2] * \dots$$

$$\dots * \underbrace{[\bar\gamma_{m-1}] * [\beta_m]}_{\text{Weg in } U \text{ oder } V}$$

Also ist $[\alpha]$ ein Produkt aus Wegen in

$i_\#(\pi_1(U,z))$ und $j_\#(\pi_1(V,z))$ $\square$

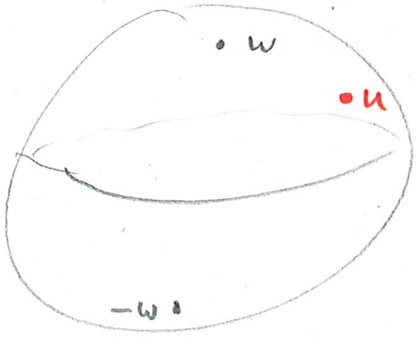
8. Beispiel $\mathbb{S}^m = \{ v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|v\| = 1 \}$ m-Sphäre.

Für $m \geq 2$ gilt $\pi_1(\mathbb{S}^m, u) = \{[\varepsilon_u]\}$, für alle $u \in \mathbb{S}^m$.

Denn: Wähle $w \in \mathbb{S}^m$, $w \neq \pm u$ und setze

$U = \mathbb{S}^m - \{w\}$, $V = \mathbb{S}^m - \{-w\}$.

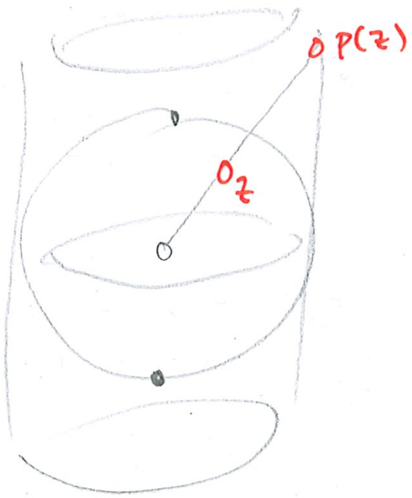
Dann gilt $U \cong \mathbb{R}^m \cong V$
homöomorph




(via stereographische Projektion)

$\Rightarrow \pi_1(U,u) = \{[\varepsilon_u]\} = \pi_1(V,u)$.

$U \cap V = \mathbb{S}^m - \{\pm w\} \cong \underbrace{\mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{R}}$ (Zylinder-Projektion p)




wegzush. für $m-1 \geq 1$
d.h. für $m \geq 2$

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^m, u) = \{[\varepsilon_u]\}$

□

Was ist mit $\pi_1(\mathbb{S}^1, u)$ ? ⟶ Später!

($\pi_1(\mathbb{S}^0, u) = \{[\varepsilon_u]\}$ für $u = \pm 1$, denn
$\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$.)

9. Satz Seien $(X_j)_{j\in J}$ topologische Räume, $J \neq \emptyset$ beliebige Indexmenge, sei $z_j \in X_j$ für jedes $j$, sei $z = (z_j)_{j\in J} \in X = \prod_{j\in J} X_j$. Dann ist die

Abbildung

$$\Phi : \pi_1(X, z) \longrightarrow \prod_{j\in J} \pi_1(X_j, z_j)$$

$$[\alpha] \longmapsto ([pr_j \circ \alpha])_{j\in J} = ((pr_j)_\# [\alpha])_{j\in J}$$

ein Gruppenisomorphismus. Kurz: Fundamentalgruppen von Produkten sind die Produkte der Fundamentalgruppen.

Beweis $\Phi$ ist nach Konstruktion ein Gruppenhomomorphismus.

(a) $\Phi$ ist surjektiv.

Sei $[\beta_j] \in \pi_1(X_j, z_j)$ für alle $j \in J$.

Definiere $\beta : [0,1] \to X$ durch

$\beta(t) = (\beta_j(t))_{j\in J}$, dann ist $\beta_j(t) = pr_j \circ \beta$

$\Rightarrow \beta$ ist stetig, $\Phi([\beta]) = ([\beta_j])_{j\in J}$ □

(b) $\Phi$ ist injektiv

Zeige dazu, dass der Kern von $\Phi$ trivial ist

(denn: $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) \Rightarrow [\alpha] * [\bar{\beta}] \in \mathrm{Ker}(\Phi)$)

Angenommen, $[\alpha] \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, d.h. $\Phi([\alpha]) = ([\varepsilon_{z_j}])_{j\in J}$.

Setze $\alpha_j := pr_j \circ \alpha$, es folgt $[\alpha_j] = [\varepsilon_{z_j}]$ für alle $j \in J$.

Für jedes $j\in J$ gibt es also eine Homotopie

$h_j : [0,1] \times [0,1] \to X_j$ mit
$$h_j(t,0) = \alpha_j(t)$$
$$h_j(t,1) = z_j$$
$$h_j(0,s) = z_j = h_j(1,s)$$

Definiere $h: [0,1]\times[0,1] \to X$ durch

$h(t,s) = (h_j(t,s))_{j\in J}$ $\quad pr_j \circ h = h_j \leadsto h$ stetig

$h(t,0) = \alpha(t) \qquad h(t,1) = z$

$h(0,s) = z = h(1,s) \quad \Rightarrow \quad [\alpha] = [\varepsilon_z]$

d.h. $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{[\varepsilon_z]\} \Rightarrow \Phi$ ist injektiv.

$\square$

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum $X$ heißt <u>einfach zusammenhängend</u> oder <u>1-zusammenhängend</u>, wenn $\pi_1(X,u) = \{[\varepsilon_u]\}$ für alle $u \in X$ gilt.

Wir wissen bisher: $\mathbb{R}^n$ ist 1-zush. für alle $n \geq 0$ und $\mathbb{S}^n$ ist 1-zush. für $n \geq 2$. Weiter ist $\mathbb{R}^n - \{0\}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ via "Polarkoordinaten",

$\mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\quad v \longmapsto \left(\frac{1}{\|v\|} \cdot v, \log(\|v\|)\right)$ mit

Inversem $(u,t) \mapsto \exp(t) \cdot u$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 1-zush. für $n \geq 3$.

Was ist aber mit $\mathbb{S}^1$ oder mit $\mathbb{R}^2 - \{0\}$? #

Dazu brauchen wir Überlagerungen.

10. <u>Def</u> (<u>Bündel</u>) Ein <u>Bündel</u> $p : E \to B$ ist eine stetige surjektive Abbildung. Man nennt $B$ <u>Basis</u> und $E$ <u>Totalraum</u>. Für $b \in B$ heißt $E_b = p^{-1}(b) \subseteq E$ die <u>Faser</u> über $b$. Ist $A \subseteq B$, so schreiben wir $E_A = p^{-1}(A) \subseteq E$, dann ist $E_A \to A$ ein Bündel. Ein <u>Morphismus</u> von Bündeln $E \xrightarrow{p} B$, $E' \xrightarrow{p'} B$ (gleiches $B$!) ist eine stetige Abbildung $f : E \to E'$ mit $p = p' \circ f$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

Wir nennen $f$ einen <u>Isomorphismus</u>, wenn es einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

gibt mit $f \circ g = id_{E'}$, $g \circ f = id_E$.

<u>Beispiele</u> (a) $B \xrightarrow[=]{} B$ ist Bündel

(b) $pr_1 : B \times F \to B$ ist Bündel ($F$ beliebiger top. Raum)

mit Fasern $E_b = \{b\} \times F \cong F$

(c) $\mathbb{R}^m - \{0\} \to S^{m-1}$, $v \longmapsto \frac{1}{\|v\|} v$ ist Bündel.

mit Fasern $E_u = \{ t \cdot u \mid t > 0 \} \cong \mathbb{R}_{>0} \underset{\overset{\uparrow}{\log}}{\cong} \mathbb{R}$

11. <u>Def</u> Ein Bündel $E \xrightarrow{p} B$ heißt <u>trivial</u>, wenn es isomorph ist zu ein Bündel der Form $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$.

$$\begin{tikzcd} B \times F \arrow[r, "h", "\cong"'] \arrow[d, "pr_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

Dann heißt $h$ <u>Trivialisierung</u> von $E \xrightarrow{p} B$.

Ein Bündel $E \xrightarrow{p} B$ heißt <u>lokal trivial</u>, wenn es zu jedem $b \in B$ ein Umgebung $U \subseteq B$ gibt so, dass $E_U \xrightarrow{p|E_U} U$ trivial ist. Genauer also: es gibt ein Homöomorphismus $h : U \times E_b \to E_U$ mit $p(h(u,y)) = u$ für alle $u \in U$, $y \in E_b$.

$$\begin{tikzcd} U \times E_b \arrow[r, "h"] \arrow[d, "pr_1"] & E_U \arrow[d] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

Die Bündel in den Beispiel (a), (b), (c) sind trivial.

Bsp (d) Sei $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \|u\| = 1,\ v \perp u\}$

$p(u,v) = u$, $p: E \to S^{m-1}$. Für $u \in S^m$ ist

die Faser $E_u = \{(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \|v\| \perp u = 0\} \cong \mathbb{R}^{m-1}$

Das Bündel ist lokal trivial (stereographische Projektion).

Es ist trivial genau dann, wenn $m = 1, 2, 4, 8$.

→ algebraische Topologie, K-Theorie

$E \xrightarrow{p} S^{m-1}$ ist das Tangentialbündel der Sphäre.

Bsp (e) $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{(c,s) \in \mathbb{R}^2 \mid c^2 + s^2 = 1\}$

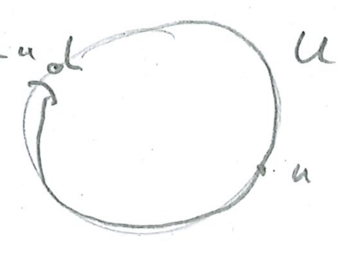
$p: E \to B$, $t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

Dieses Bündel ist lokal trivial, aber nicht trivial.

Denn: sei $a \in \mathbb{R}$, $u = p(a) = (\cos(2\pi a), \sin(2\pi a))$

Setze $U = S^1 - \{-u\} = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \mid |t-a| < 1\}$

$\cong (-\pi, \pi)$




$p^{-1}(U) = \{t \in \mathbb{R} \mid t - a \notin \mathbb{Z}\}$

$\cong (-1,1) \times \mathbb{Z}$

Trivialisierung von $E_U \to U$ ist

$h: (t,k) \longmapsto a + k + t$

12. <u>Lemma</u> Sei $E \xrightarrow{p} B$ ein triviales Bündel, sei $X$ top. Raum, $f: X \to B$ stetig. Sei $A \subseteq X$ und sei $\tilde{F}_0 : A \to E$ stetig mit $p \circ \tilde{F}_0 = f|_A$. Falls es eine stetige Retraktion $r: X \to A$ gibt (d.h. $r(a) = a$ für alle $a \in A$), so hat $\tilde{F}_0$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{F}: X \to E$ mit $p \circ \tilde{F} = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\exists \tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Sei $h: B \times F \xrightarrow{\cong} E$ eine Trivialisierung, $h^{-1}(y) = (p(y), \varphi(y))$. Definiere

$$\tilde{F}(x) = h(f(x), \varphi(\tilde{F}_0(r(x))))$$. Dann gilt für $a \in A$

$$\tilde{F}(a) = h(f(a), \varphi(\tilde{F}_0(a))) = \tilde{f}_0(a).$$ $\square$

13. <u>Die Homotopiehochhebungseigenschaft HEP</u> [1]

Sei $E \xrightarrow{p} B$ ein Bündel, $X$ ein top. Raum. Das Bündel hat die <u>HEP in Bezug auf $X$</u>, wenn folgendes Problem immer eine Lösung hat:

---

[1] engl. homotopy lifting property

Wenn $\tilde{f}_0 : X \times \{0\} \to E$ und $f : X \times [0,1] \to B$ stetig sind mit $p\tilde{f}_0(x,0) = f(x,0)$ für alle $x \in X$, so gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{F} : X \times [0,1] \to E$ von $\tilde{f}_0$ mit $p(\tilde{F}(x,s)) = f(x,s)$ für alle $x \in X$, $s \in [0,1]$

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\exists \tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

Solch ein $\tilde{F}$ heißt dann ein <u>Lift</u> von $f$.

Ein Bündel $E \xrightarrow{p} B$, dass die HLP für alle $X = [0,1]^m$ hat, heißt <u>Serre-Faserung</u>.

[J.P. Serre, franz. Math. 1926 - heute, publiziert immer noch]

Ein Bündel, das die HLP für <u>jeden</u> top. Raum $X$ hat, heißt <u>Hurewicz-Faserung</u>

W. Hurewic, 1904 - 1956, poln. Mathematiker

Lemma §4.12 sagt: jedes triviale Bündel ist eine Hurewicz- bzw Serre-Faserung (mit $X = Y \times [0,1]$, $A = Y \times \{0\}$, $r(y,s) = (y,0)$).

14. **Theorem** Jedes lokal triviale Bündel ist eine Serre-Faserung. #

**Beweis** Sei $p: E \to B$ ein lokal triviales Bündel, sei $m \geq 0$, sei $f: [0,1]^m \times [0,1] = [0,1]^{m+1} \to B$ stetig und $\tilde{F}_0 : [0,1]^m \times \{0\} \to E$ stetig mit

$$p(\tilde{F}_0(x_1, \dots, x_m, 0)) = f(x_1, \dots, x_m, 0)$$

**Beh** Es gibt ein $\ell \geq 1$ so, dass Folgendes gilt: für jeden Würfel $Q \subseteq [0,1]^{m+1}$ der Seitenlänge $\frac{1}{\ell}$ ist

$$E_{f(Q)} \to f(Q) \text{ ein triviales Bündel.}$$

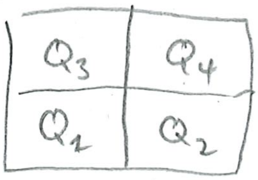
**Beweis der Behauptung.** Wäre das falsch, gäbe es für jedes $\ell \geq 1$ ein Gegenbeispiel $Q_\ell$. Wähle $z_\ell \in Q_\ell$. Da $[0,1]^{m+1}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(z_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $z \in [0,1]^{m+1}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $E_{f(B_\varepsilon(z))} \to f(B_\varepsilon(z))$ trivial ist. Es gibt dann $\ell > 2\frac{\sqrt{m+1}}{\varepsilon}$ mit $z_\ell \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$. Aber dann ist $Q_\ell \subseteq B_\varepsilon(z)$ ↯

□

Wir wählen $\ell \geq 1$ so und zerlegen $[0,1]^{m+1}$ in $\ell^{m+1}$ Würfel $Q(i_1, \dots, i_{m+1}) = \left[\frac{i_1 - 1}{\ell}, \frac{i_1}{\ell}\right] \times \dots \times \left[\frac{i_{m+1}-1}{\ell}, \frac{i_{m+1}}{\ell}\right]$ der Kantenlänge $\frac{1}{\ell}$

| | |
|---|---|
| Q(12) | Q(22) |
| Q(11) | Q(21) |

Diese Würfel ordnen wir "lexikographisch" als




$Q_1, \dots, Q_{2^{m+1}}$.

Setze $A_0 = [0,1]^m \times \{0\}$ sowie

$$A_{k+1} = A_k \cup Q_k \Rightarrow A_{2^{m+1}} = [0,1]^{m+1}$$

Wir konstruieren schrittweise $\tilde{f}_k : A_k \to E$ mit $p \circ \tilde{f}_k = F|_{A_k}$. Betrachte dazu $R_k = Q_k \cap A_{k-1}$.

Dann gibt es eine stetige Retraktion $Q_k \to R_k$

( 

oder 

$m = 1$ )

also eine stetige Fortsetzung von $\tilde{f}_{k-1}|_{R_k}$ auf $Q_k$ und damit von $\tilde{F}_{k-1}$ auf $A_k$, Lemma §4.12 □

**15. Theorem** Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, sei $v \in B$ und sei $u \in E$ mit $p(u) = v$.

Betrachte $i : E_v \hookrightarrow E$ sowie $p : E \to B$.

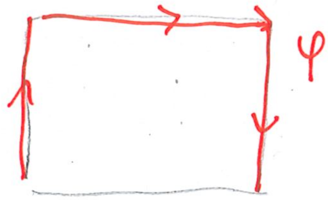
sowie
$$i_\# : \pi_1(E_v, u) \to \pi_1(E, u)$$
$$p_\# : \pi_1(E, u) \to \pi_1(B, v)$$

Dann ist das Bild von $i_\#$ genau der Kern von $p_\#$. Falls $E_u$ wegzusammenhängend ist, so ist $p_\#$ surjektiv.

Beweis: Sei $\alpha : [0,1] \to E_v$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1) = u$. Dann gilt $p \circ \alpha = \varepsilon_v$, also $p_\#[\alpha] = [\varepsilon_v]$. Damit $i_\#(\pi_1(E_v,u)) \subseteq \mathrm{Ker}(p_\#)$, also "$\subseteq$". $\square$

"$\supseteq$": Sei $\beta : [0,1] \to E$ stetig mit $\beta(0) = \beta(1) = u$ und $p_\#[\beta] = [\varepsilon_v]$. Also gibt es $h : [0,1] \times [0,1] \to B$ stetig mit $h(t,0) = p \circ \beta(t)$, $h(t,1) = v = h(0,s) = h(1,s)$, $0 \le t,s \le 1$.

Also existiert $\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \to E$ mit $\tilde{h}(t,0) = \beta(t)$ sowie $p \circ \tilde{h} = h$.




Setze $\varphi(t) = \begin{cases} (0,3t) & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (3t-1,1) & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (1, 3-3t) & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$

sowie $\gamma(t) = \tilde{h}(\varphi(t)) \Rightarrow \gamma(t) \in E_v$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = u$.

und $\gamma \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$ via Homotopie

$$h'(t,s) = \tilde{h}(s(t,0) + (1-s)\varphi(t)),$$ d.h.

$[\beta] = i_\#[\gamma]$, also "$\supseteq$" $\square$

Angenommen, $E_v$ ist wegzush. Sei $\delta : [0,1] \to B$ stetig mit $\delta(0) = \delta(1) = v$, sei $\tilde{\delta} : [0,1] \to E$ Lift, $\tilde{\delta}(0) = u$, $p \circ \tilde{\delta} = \delta$. Sei $\rho : [0,1] \to E_v$ stetig mit $\rho(0) = \tilde{\delta}(1)$, $\rho(1) = u$. Für $\tilde{\delta} * \rho$ gilt dann

$p_\#[\tilde{\delta} * \rho] = [\delta * \varepsilon_v] = [\delta]$, also ist $p_\#$ surjektiv.

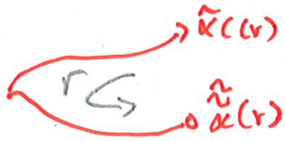
$\square$

**16. Lemma** Sei $p: E \to B$ eine Serre-Faserung, sei $\alpha : [0,1] \to B$ stetig, sei $u \in E$ mit $p(u) = \alpha(0)$. Wenn alle Fasern $E_b \subseteq E$ total unzusammenhängend sind (zum Beispiel: $E_b$ ist für jedes $b \in B$ diskret), so gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{\alpha} : [0,1] \to E$ mit $\tilde{\alpha}(0) = u$ und $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, "\exists ! \tilde{\alpha}"] & B \end{tikzcd}$$

**Beweis** Die Existenz von $\tilde{\alpha}$ ist §4.14 mit $m = 0$.

Angenommen, wir haben zwei Lösungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\alpha}}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\tilde{\alpha}}(0) = u$, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha = p \circ \tilde{\tilde{\alpha}}$. Für $r \in [0,1]$ betrachte den Weg
$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(r - 2rt) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tilde{\tilde{\alpha}}(2r(t - \frac{1}{2})) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$



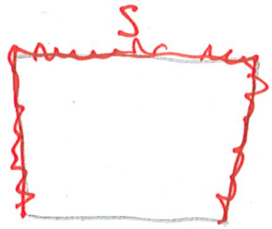

$\Rightarrow p \circ \gamma \simeq \varepsilon_w$ rel $\{0,1\}$, $w = p(\tilde{\alpha}(r)) = p(\tilde{\tilde{\alpha}}(r))$.

$\rightsquigarrow$ wir erhalten einen Lift $\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \to E$ mit

$\tilde{h}(t,0) = \gamma(t)$

$\tilde{h}(t,1) \in E_w$

$\tilde{h}(0,s), \tilde{h}(1,s) \in E_w$




$S = \{(t,1), (0,s), (1,s) \mid s,t \in [0,1]\}$ zush.

$\Rightarrow \tilde{h}(S) = \{\gamma(0)\} = \{\gamma(1)\} \Rightarrow \tilde{\alpha}(r) = \tilde{\tilde{\alpha}}(r)$ $\square$

<u>Korollar</u> Ist $p: E \to B$ eine Serre-Faserung mit total unzusammenhängenden Fasern, so hat das Problem

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^m \times \{0\}} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]^m \times [0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

<u>genau eine</u> Lösung $\tilde{F}$.

<u>Bew.</u> Angenommen, $\tilde{F}$ und $\tilde{\tilde{F}}$ sind Lösungen. Für $x \in [0,1]^m \times [0,1]$ setze $\alpha(t) = f(tx)$.

$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{F}(tx)$ ist dann nach dem Lemma der <u>eindeutige</u> Lift von $\alpha$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{F}_0(0) \Rightarrow$

$\tilde{\tilde{F}}(tx) = \tilde{F}(tx) \Rightarrow \tilde{\tilde{F}} = \tilde{F}$ $\square$

17. <u>Def</u> Ein lokal triviales Bündel $E \xrightarrow{p} B$ heißt <u>Überlagerung</u>, wenn die Fasern $E_b$ <u>diskret</u> sind. #

Ist also $E \xrightarrow{p} B$ eine Überlagerung, so ist das auch eine Serre-Faserung. Das Problem

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^m \times \{0\}} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]^m \times [0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

hat dann stets eine <u>eindeutige</u> Lösung, vgl §4.16.

**18. Lemma** Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, sei $u \in E$ und $v = p(u)$. Für $\alpha: [0,1] \to B$ mit $\alpha(0) = u$ sei $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift mit $\tilde{\alpha}(0) = v$, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Ist $\beta: [0,1] \to B$ stetig mit $\alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$, so gilt $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ rel $\{0,1\}$. Insbesondere ist $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$.

*Beweis* Sei $h: [0,1] \times [0,1] \to B$ Homotopie mit

$h(t,0) = \alpha(t)$ $\quad h(0,s) = \alpha(0)$ $\quad$ Sei $\tilde{h}$ der
$h(t,1) = \beta(t)$ $\quad h(1,s) = \alpha(1)$.

eindeutige Lift mit $p \circ \tilde{h} = h$, $\tilde{h}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$.
Wegen $p(\tilde{h}(0,s)) = \alpha(0) = \text{const}$ folgt $\tilde{h}(0,s) = \tilde{\alpha}(0)$,
genauso $\tilde{h}(1,s) = \tilde{\alpha}(1)$ (Eindeutigkeit des Lifts!)
damit $\tilde{h}(t,1) = \tilde{\beta}(t)$ ( " " " ) $\square$

**19. Satz** Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, sei $u \in E$, $p(u) = v$. Wir definieren eine Abbildung

$$\Phi = \Phi_{u,v} : \pi_1(B,v) \to E_v \quad \text{durch}$$

$$[\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1)$$

wobei $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}(0) = u$.

Wenn $E$ wegzusammenh. ist, so ist $\Phi$ surjektiv.

Wenn $E$ 1-zush. ist, so ist $\Phi$ bijektiv.

<u>Beweis</u> Nach § 4.18 gilt: wenn $[\alpha] = [\beta]$, dann ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, also ist $\Phi$ wohldefiniert.

Angenommen, $E$ ist wegzush. und $w \in E_v$.

Dann gibt es $\tilde{\gamma}: [0,1] \to E$ stetig mit $\tilde{\gamma}(0) = u$, $\tilde{\gamma}(1) = w$.

Für $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ folgt $\Phi[\gamma] = w$ ms $\Phi$ surjektiv.

Angenommen, $E$ ist 1-zush. und $\Phi[\alpha] = \Phi[\beta]$.

Dann ist $[\tilde{\alpha} * \bar{\tilde{\beta}}] = [\varepsilon_u]$ (weil $\pi_1(E,u) = \{[\varepsilon_u]\}$),

Also $[p \circ (\tilde{\alpha} * \bar{\tilde{\beta}})] = [(p \circ \tilde{\alpha}) * (p \circ \bar{\tilde{\beta}})] = [\alpha] * [\bar{\beta}]$

$= [\varepsilon_v]$, d.h. $[\alpha] = [\beta]$. □

20. <u>Satz</u> Sei $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$,

sei $u = 0$, $v = p(u) = (1,0) \in S^1$. Dann ist

$$\Phi: \pi_1(S^1, v) \to \mathbb{Z}$$
$$[\alpha] \longmapsto \Phi[\alpha] = \tilde{\alpha}(1)$$

ein Gruppenisomorphismus, $\pi_1(S^1, v) \cong \mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u> Nach § 4.19 ist $\Phi$ bijektiv.

Für $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere

$(\gamma + k)(t) = \gamma(t) + k$.

Für $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, v)$ gilt dann:

$\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * (\widetilde{\beta + k})$, wobei $k = \tilde{\alpha}(1)$,

denn $p \circ (\tilde{\alpha} * (\widetilde{\beta + k})) = \alpha * \beta$

Sei $l = \tilde{\beta}(1)$, dann ist $\widetilde{\alpha * \beta}(1) = k + l$

$\Rightarrow \Phi[\alpha * \beta] = k + l = \Phi[\alpha] + \Phi[\beta]$, d.h. $\Phi$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Da $\Phi$ bijektiv ist, ist $\Phi$ ein Gruppenisomorphismus. $\square$

## 21. Einige Anwendungen

**Satz A** Für $u \in \mathbb{R}^2$, $v \neq u$ gilt

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{u\}, v) \cong \mathbb{Z}.$$

**Beweis** Es gibt einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 - \{u\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (etwa $x \mapsto x - u$). Nun gilt $\mathbb{R}^2 - \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, vgl. §4.9 und $\pi_1(\mathbb{R}, w) = \{[\varepsilon_w]\}$ für alle $w \in \mathbb{R}$. Da $S^1$ wegzshd. ist, gilt $\pi_1(S^1, u) \cong \mathbb{Z}$ für alle $u \in S^1$, vgl. §4.3. Nach §4.9 ist $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \pi_1(S^1, w) \times \pi_1(\mathbb{R}, u) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

**Satz B** Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{B}_1(0)$ Kreisscheibe.

Es gibt keine stetige Retraktion $r : D \to S^1$.

**Beweis** Angenommen, $r : D \to S^1$ wäre eine stetige Retraktion. Betrachte

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, equal] & D^2 \arrow[d, "r"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

und dann

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \\ \cong & & \\ \pi_1(S^1,v) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(D^2,v) \cong \{0\} \\ & \diagdown\!\diagdown & \downarrow r_\# \\ & & \pi_1(S^1,v) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

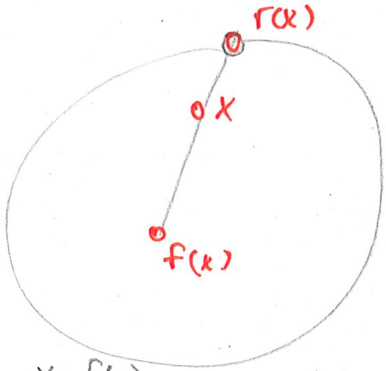
Da $D^2$ konvex ist, gilt $\pi_1(D^2,v) = \{[\varepsilon_v]\}$ ↯

□

**Satz C** (Brouwers Fixpunktsatz in Dimension 2)

Sei $f: D^2 \to D^2$ stetig. Dann gibt es $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

**Beweis** Angenommen, $f: D^2 \to D^2$ ist stetig und $F(x) \neq x$ für alle $x \in D^2$. Definiere $r: D^2 \to S^1$ wie folgt:




Explizit: $h(x) = \dfrac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$ stetig

$r(x) = x + \lambda(x) \cdot h(x) \qquad \lambda(x) \geq 0$

$1 = \|r(x)\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2(x) + \lambda(x) \cdot 2\langle x, h(x)\rangle$

$$\lambda(x) = \frac{-2\langle x, h(x)\rangle + \sqrt{4\langle x, h(x)\rangle^2 + 4(1 - \|x\|^2)}}{2}$$

$$= -\langle x, h(x)\rangle + \sqrt{\langle x, h(x)\rangle^2 + 1 - \|x\|^2} \quad \text{stetig.}$$

Für $x \in S^1$ ist dann $r(x) = x$ ↯

□

<u>Bemerkung</u>: Brouwers Fixpunktsatz gilt in allen Dimensionen $m \geq 1$: jede stetige Abbildung $f: D^m \to D^m$ hat ein Fixpunkt, wobei

$$D^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$$

[ $m = 1$ ⇝ Zwischenwertsatz: $h(x) = x - f(x)$

$h(0) = -f(0) \leq 0$, $h(1) = 1 - f(1) \geq 0$

⇝ es gibt $x$ mit $h(x) = 0$ ]

→ algebraische Topologie

<u>Satz D</u> $S^1 \times S^1$ und $S^2$ sind <u>nicht</u> homöomorph. ("Ein Autoreifen ist kein Fußball".)

$S^1 \times S^1$

$S^2$

<u>Beweis</u> $\pi_1(S^1 \times S^1, u) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\pi_1(S^2, v) \cong \{0\}$ vgl §4.7. □

Satz E (Hauptsatz der Algebra)

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom, $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann hat $f$ eine Nullstelle $w \in \mathbb{C}$, d.h. $f(w) = 0$.

Beweis Bem 0. OE $|a_{n-1}| + \ldots + |a_0| < 1$.

Denn: für $c \in \mathbb{C}$, $c \neq$ substituiere $z = wc$

$$f(z) = c^n w^n + \ldots + a_0$$

$$\frac{1}{c^n} f(z) = w^n + \frac{a_{n-1}}{c} w^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{c^2} w^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{c^n}$$

Für $|c| \gg 1$ ist $\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{c^n}\right| < 1$

und $f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^n} f(wc) = 0$ □

Wir nehmen jetzt an, $f(z) = z^n + \ldots + a_0$ wäre ein Gegenbeispiel, mit $|a_{n-1}| + \ldots + |a_0| < 1$. Wir betrachten $f$ als Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$.

Setze $D^2 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq 1\}$
$S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$

Bem 1 $f|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$ wählt den trivialen Homomorphismus $(f|_{S^1})_\# : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, f(1))$.
$[\alpha] \longmapsto [\varepsilon_{f(1)}]$

Denn:

ergibt
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \\ \pi_1(S^1,1) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathbb{C}-\{0\}, f(1)) \cong \mathbb{Z} \\ \pi_1(D^2,1) \arrow[ur] & \\ \{0\} \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & \end{tikzcd}$$

$\square$

**Beh 2** Setze $g(z) = z^n$. Dann ist

$g_\#: \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(\mathbb{C}-\{0\}, 1)$ nicht der triviale Homomorphismus.

**Denn** $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \rightsquigarrow \Phi(\alpha) = [1]$ in $\pi_1(S^1,1)$, betrachte Retraktion $r: \mathbb{C}-\{0\} \to S^1$

$u \mapsto \frac{u}{|u|}$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathbb{C}^*-\{0\} \arrow[d, "r"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

$r \circ g \circ \alpha(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t))$

$\Phi[r\circ g\circ\alpha] = n$ $\square$

Jetzt der Widerspruch. Betrachte $F_s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$

$F_1 = f,\quad F_0 = g,\quad f_s(z) \neq 0$ für alle $s\in[0,1]$, $|z| = 1$

Setze $\beta_s(t) = F_{t\cdot s}(1)$, $\beta_s(0) = 1$, betrachte

$h(t,s) = \beta_s * ((f_s\circ\alpha) * \overline{\beta_s})(t)$ stetig (!)

$h(t,0) = g\circ\alpha(t)$ $\quad h(t,1) = \beta_1 * ((f\circ\alpha) * \overline{\beta_1})$

$h(0,s) = 1 = h(1,s)$, $\quad h(t,s) \neq 0$

$h(t,0) = (g\circ\alpha)(t) \qquad h(t,1) = \beta_1 * ((f\circ\alpha) * \bar\beta_1)$

$h(0,s) = 1 = h(1,s) \qquad h(s,t) \neq 0.$

Daher
$$\underbrace{[g\alpha\alpha]}_{\neq [\varepsilon_1]} = \underbrace{[\beta_1] * \underbrace{[f\circ\alpha]}_{=[\varepsilon_{f(1)}]} * [\bar\beta_1]}_{=[\varepsilon_1]} \qquad ↯$$

$\square$

22. Sei $p: E \to B$ ein Überlagerung, sei $X$ ein top. Raum, sei $x_0 \in X$, sei $f: X \to B$ stetig. Sei $u \in E$ mit $p(u) = f(x_0) = v$. Das <u>Hochhebe-Problem</u> ist die Frage, ob es $\tilde f: X \to E$ stetig gibt mit $\tilde f(x_0) = u$ und $p\circ\tilde f = f$,

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde f\,?"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde f(x_0) = u$,
$f(x_0) = p(u)$

<u>Lemma</u> Falls $X$ wegzush. ist, hat das Hochhebeproblem (bei gegebenen $f$, und $u$) höchstens eine Lösung.

<u>Beweis</u> Sei $y \in X$ beliebig, sei $\alpha: [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = y$. Betrachte $\beta(t) = f(\alpha(t))$. Wenn $\tilde F$ eine Lösung ist,

so ist $\tilde{\beta} = \tilde{f} \circ \beta$ ein Lift von $\beta$ mit $\tilde{\beta}(0) = u$. Dann ist $\tilde{\beta}(1) = \tilde{F}(y)$ eindeutig bestimmt durch $\beta$ nach § 4.16. $\square$

23. Def Ein top. Raum $X$ heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn gilt: zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ und jedem $u \in U$ gibt es eine wegzush. offene Menge $V$ mit $u \in V \subseteq U$.

Bsp $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\Rightarrow$ $X$ lokal wegzush. Denn:

$U \subseteq X$ offen, $u \in U \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\underbrace{B_\varepsilon(u)}_{= V} \subseteq U$

und $B_\varepsilon(u)$ ist wegzush. $\square$

Theorem Sei $X$ wegzush. und lokal wegzush., sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, sei $f: X \to B$ stetig, $x_0 \in X$, $u \in E$ mit $p(u) = f(x_0)$.

Dann gilt: Das Hochhebe-Problem

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

hat genau dann eine Lösung $\tilde{f}$, mit $p \circ \tilde{f} = f$, $\tilde{f}(x_0) = u$, wenn gilt

(*) $\quad f_\#(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_\#(\pi_1(E, u))$.

Falls dies gilt, ist die Lösung <u>eindeutig</u>.

Beachte auch: $\circledast$ ist erfüllt, wenn $X$ 1-zush. ist:

<u>Beweis</u> Die Lösung ist eindeutig bestimmt nach §4.22 (falls sie existiert).

Angenommen, $\tilde{f}$ ist eine Lösung. Dann ist

$f_\# = p_\# \circ \tilde{f}_\#$, damit $f_\#(\pi_1(X,x_0)) \subseteq p_\#(\pi_1(E,u))$,

d.h. dann muss $\circledast$ gelten.

Bleibt zu zeigen: wenn $\circledast$ gilt, gibt es eine Lösung $\tilde{f}$.

Wir nehmen also an, dass $\circledast$ gilt. Sei $y \in X$, sei $\alpha : [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = y$, sei $\beta(t) = f(\alpha(t)) \leadsto \beta(0) = v = p(u)$. Sei $\tilde{\beta}$ der eindeutige Lift von $\tilde{\beta}$ mit $\tilde{\beta}(0) = u$, $p \circ \tilde{\beta} = \beta$.

Wir würden gern definieren $\tilde{f}(y) = \tilde{\beta}(1)$.

Angenommen, $\alpha' : [0,1] \to X$ ist ein anderer Weg mit $\alpha'(0) = x_0$, $\alpha'(1) = y$. Setze $\beta' = f \circ \alpha'$

$\tilde{\beta}'$ der Lift, $\tilde{\beta}'(0) = u$

$p \circ \tilde{\beta}' = \beta$.

Wegen $[\alpha * \overline{\alpha'}] \in \pi_1(X,x_0)$ folgt mit $\circledast$, dass

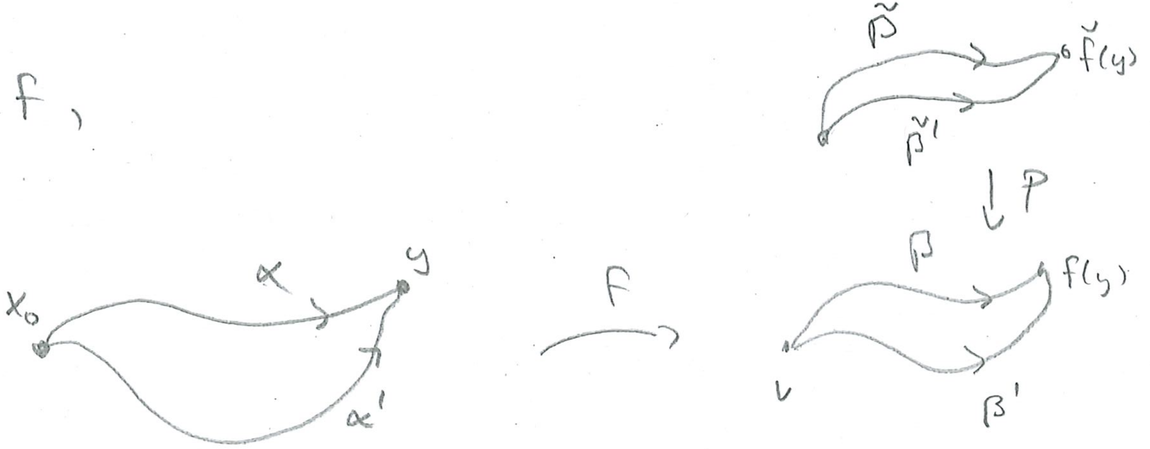
$[\underbrace{f \circ (\alpha * \overline{\alpha'})}_{= \beta * \overline{\beta'}}] \in p_\#(\pi_1(E,u))$. Es folgt

mit §4.18, dass $\widetilde{\beta * \overline{\beta'}} \in \pi_1(E,u)$

d.h. $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}'(1)$. Damit ist $\tilde{f}(y) = \tilde{\beta}(1)$

<u>wohldefiniert</u>, und gilt

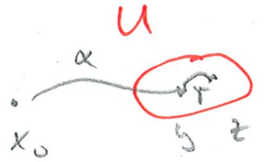
$p \circ \tilde{F} = f$,




1

Bleibt zu zeigen: $\tilde{F}$ ist stetig. Dazu benutzen wir, dass $X$ lokal wegzush. ist. Sei $y \in X$, sei $W \subseteq B$ offen mit $f(y) \in W$ und $E_W \to W$ trivial. Sei $U \subseteq X$ offen und wegzush. mit $y \in U$ und $f(U) \subseteq W$. Für $z \in U$ gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = z$. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = y$. Dann ist

$$\tilde{F}(z) = \underbrace{\widetilde{f \circ (\alpha * \gamma)}}_{\substack{\text{Lift von } f\circ(\alpha*\gamma) \\ \text{mit Anfangspunkt } u}}(1)$$




$$= \underbrace{\widetilde{f \circ \gamma}}_{\substack{\text{Lift mit Anfangspunkt} \\ \tilde{F}(y)}}(1)$$

Betrachte Trivialisierung

$$\begin{tikzcd} E_W \arrow[d, "p"'] & W \times F \arrow[l, "h"', "\cong"] \arrow[d, "pr_1"] \\ W \arrow[r, equal] & W \end{tikzcd}$$

$$h^{-1}\left(\widetilde{f \circ \gamma}(t)\right) = \left(f \circ \gamma(t), \underbrace{\varphi(\widetilde{f \circ \gamma}(t))}_{= \text{const}}\right) = \left(f \circ \gamma(t), \varphi(\tilde{F}(y))\right)$$

$h^{-1}(e) = (p(e), \varphi(e))$

$\varphi : E_W \to F$ stetig
↑
diskret

$$\rightsquigarrow \tilde{F}(z) = \underbrace{h(f(z), \varphi(\tilde{F}(y)))}_{\text{stetig}}$$

□

(1) Etwas genauer: Angenommen, $\xi : [0,1] \to B$ ist stetig, $[\xi] \in \pi_1(B,v)$, $[\tau] \in \pi_1(E,u)$, $p_\# [\tau] = [\xi]$. Dann gilt $[\tau] = [\tilde{\xi}]$. Denn: $p \circ \tau \simeq \xi$ rel $\{0,1\}$, Lift ergibt Homotopie $\tau \simeq \tilde{\xi}$ rel $\{0,1\}$, vgl §4.18.

<u>Korollar</u> Sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Überlagerung, seien $u, w \in E$ mit $p(u) = p(w) = v$. Wenn $E$ 1-zush. und lokal wegzush. ist, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $\varphi : E \to E$ mit $p \circ \varphi = p$ <u>und</u> $\varphi(u) = w$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Das ~~Pro~~ Hochhebe-Problem

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

mit $p \circ \varphi = p$, $\varphi(u) = w$ hat genau eine stetige Lösung,

ebenso

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

mit $p \circ \psi = p$, $\psi(w) = u$

also

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\psi \circ \varphi"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, equal] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

d.h. $\psi \circ \varphi = id_E$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\varphi \circ \psi"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, equal] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

d.h. $\varphi \circ \psi = id_E$

$\square$

<u>Bsp</u>: $E = \mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$, $t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$u = k$, $w = l$, $v = (1,0)$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$\varphi(t) = l - k \rightsquigarrow \varphi(k) = l$

24. <u>Erinnerung</u> Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge, $g: X \to X$ bijektive Abbildung, so heißt $g$ <u>Permutation</u> der Menge $X$.

Die Permutationen von $X$ bilden eine <u>Gruppe</u> $\mathrm{Sym}(X)$ (bzgl. Hintereinanderausführung)

[Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man auch $\mathrm{Sym}(n)$]

Ist $G$ eine Gruppe, $\varphi: G \to \mathrm{Sym}(X)$ ein Homomorphismus, so <u>wirkt</u> $G$ auf $X$ durch

$$G \times X \to X \qquad (g,x) \longmapsto \varphi(g)(x) = g(x)$$

$\uparrow$ $\varphi$ wird unterdrückt...

Der <u>Stabilisator</u> von $x \in X$ ist die Untergruppe $G_x = \{ g \in G \mid g(x) = x \} \subseteq G$, die <u>Bahn</u> von $x$ ist $G(x) = \{ gx \mid g \in G \} \subseteq X$

Die Abbildung $G/G_x \longrightarrow G(x)$, $gG_x \longmapsto g(x)$ ist <u>bijektiv</u>: Surjektivität ist klar; wenn $g(x) = h(x)$, dann $h^{-1}g \in G_x \Rightarrow gG_x = hG_x$ $\square$

Der <u>Kern</u> der Wirkung ist $\mathrm{Ke}(\varphi) = \bigcap_{x \in X} G_x$

$= \{ g \in G \mid g(x) = x \text{ für alle } x \in X \}$.

Die Wirkung $G \times X$ heißt <u>transitiv</u>, wenn es für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $g(x) = y$.

Äquivalent: $G(x) = X$ gilt für jedes (ein) $x \in X$.

<u>Konstruktion</u> Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, sei $\gamma: [0,1] \to B$ stetig. Für $w \in E_{\gamma(1)}$ sei $\gamma_w: [0,1] \to E$ der eindeutige Lift von $\gamma$ mit

$\gamma_w(1) = w$ $\left[\begin{array}{l} \beta \text{ der eindeutige Lift von } \bar{\gamma} \text{ mit } \beta(0)=w, \\ \gamma_w = \bar{\beta} \end{array}\right]$

$p \circ \gamma_w = \gamma$

Definiere $L_\gamma : E_{\gamma(1)} \to E_{\gamma(0)}$, $w \longmapsto \gamma_w(0)$

Dann gilt für $\gamma(1) = \delta(0)$, dass

$$L_{\gamma * \delta}(v) = L_\gamma \delta_v(0) = L_\gamma \circ L_\delta, \text{ insbesondere}$$

$$L_\gamma \circ L_{\bar{\gamma}} = id_{E_{\gamma(0)}}, \quad L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma = id_{E_{\gamma(1)}}.$$

25 <u>Satz</u> Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, sei $u \in E$, $v = p(u) \in B$. Dann wirkt $\pi_1(B,v)$ auf $E_v$ durch

$$\pi_1(B,v) \to \mathrm{Sym}(E_v)$$
$$[\alpha] \longmapsto L_\alpha =: L_{[\alpha]}.$$

Der Stabilisator von $u$ ist $p_\#(\pi_1(E,u)) \subseteq \pi_1(B,v)$.

Falls $E$ wegzusammenhängend ist, so ist die Wirkung transitiv, und wir erhalten eine Bijektion

$$\pi_1(B,v) \big/ p_\#(\pi_1(E,u)) \longrightarrow E_v$$

Bew. Ist $[\alpha]=[\beta]$ in $\pi_1(B,v)$, mit Lifts $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ und $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\beta}(1)$, so ist $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{\alpha}(0)$, vgl. §4.18. Dann gilt also $L_\alpha = L_\beta$, also ist $L_{[\alpha]}: E_v \to E_v$ wohldefiniert. Die Konstruktion oben zeigt, dass die Abbildung $[\alpha]\mapsto L_{[\alpha]}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Weiter gilt

$L_{[\alpha]}(u)=u \iff \tilde{\alpha}(0)=\tilde{\alpha}(1)$, wobei $\tilde{\alpha}$ Lift von $\alpha$ mit $\tilde{\alpha}(1)=u$ $\iff [\tilde{\alpha}]\in \pi_1(E,u) \iff [\alpha]\in p_\#(\pi_1(E,u))$

Ist $w,w'\in E_v$ und ist $E$ wegzush., so gibt es $\gamma:[0,1]\to E$ stetig mit $\gamma(0)=w'$, $\gamma(1)=w$. Für $\alpha = p\circ\gamma$ gilt dann $L_{[\alpha]}(w)=w'$, also wirkt $\pi_1(B,v)$ dann transitiv auf $E_v$. $\square$

Wir kombinieren das jetzt mit §4.23.

26. Def Sei $E\xrightarrow{p}B$ ein Überlagerung. Ein Homöomorphismus $h:E\to E$ heißt Deckbewegung, wenn gilt $p\circ h=p$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

Die Deckbewegungen von $E \xrightarrow{p} B$ bilden bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe

$$\mathrm{Deck}(E \xrightarrow{p} B) = \{ h : E \to E \mid h \text{ Deckbewegung} \}$$

**27. Satz** Sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Überlagerung, sei $E$ 1-zush. und lokal wegzush. Sei $u \in E$, $v = p(u) \in B$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi : \pi_1(B, v) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Deck}(E \xrightarrow{p} B)$$

$\varphi[\alpha] = h \Leftrightarrow h(u) = \tilde{\alpha}(1)$, wobei $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift von $\alpha$ ist mit $\tilde{\alpha}(0) = u$.


**Beweis** Nach §4.23 Korollar gibt es genau ein $h \in \mathrm{Deck}(E \xrightarrow{p} B)$ mit $h(u) = \tilde{\alpha}(1)$. Also ist $\varphi$ wohldefiniert.

Weiter gilt $L_{[\tilde{\alpha}]}(u) = h(u)$

Seien jetzt $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, v)$ mit Lifts $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}(0) = u = \tilde{\beta}(0)$. Sei $h(u) = \tilde{\alpha}(1)$ usw.

$\tilde{\alpha} * (h \circ \tilde{\beta}) = \widetilde{\alpha * \beta}$ und $\tilde{\alpha} * (h \circ \tilde{\beta})(1) = h(\tilde{\beta}(1))$

Es folgt $\varphi[\alpha * \beta] = h \circ h'$, wenn $h'(u) = \tilde{\beta}(1)$

also $\varphi[\alpha*\beta] = \varphi([\alpha]) \circ \varphi([\beta])$ $\Rightarrow$ $\varphi$ Homomorphismus.

Ist $h$ beliebige Decktransformation, so gibt es $\gamma : [0,1] \to E$ stetig mit $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = h(u)$ $\Rightarrow$ $\varphi[p \circ \gamma] = h$, $\varphi$ ist surjektiv. Ist $\varphi[\alpha] = id_E$, so ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0)$ $\Rightarrow$ $[\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_u]$ $\Rightarrow$ $[\alpha] = [\varepsilon_v]$ $\Rightarrow$ $\varphi$ ist injektiv. $\square$

Wir betrachten zuletzt eine Umkehrung von Satz §4.27.

28. Def Es sei $X$ ein top. Raum, $G$ eine Gruppe. Wir nehmen an, dass $G$ auf $X$ wirkt so, dass für jedes $g \in G$ die Abbildung $x \mapsto g(x)$ ein Homöomorphismus ist. Man sagt dann auch, dass $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g(x)$ eine Transformationsgruppe ist.

Beispiel $G = (\mathbb{Z}^m, +)$ additive Gruppe der ganzzahligen Vektoren, $X = \mathbb{R}^m$, Wirkung

$$(a, v) \longmapsto a+v \qquad a \in \mathbb{Z}^m, \ v \in \mathbb{R}^m$$

Betrachte den Bahnenraum $G\backslash X = \{G(x) \mid x \in X\}$ dessen Elemente die Bahnen von $G$ in $X$ sind, mit der Abbildung $q : X \to G\backslash X$, $x \mapsto G(x) := \{g(x) \mid g \in G\} \subseteq X$

Wir versehen $_G\backslash X$ mit der Quotiententopologie bzgl. $q: X \to {_G\backslash X}$ und betrachten folgende Bedingung an die Transformationsgruppe $G \times X \to X$:

(D) Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U$ von $x$ so, dass $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ gilt für alle $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \neq g_2$ (oder äquivalent: $U \cap g(U) = \emptyset$ für alle $g \in G$, $g \neq e$).

Im Beispiel $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(a, v) \mapsto a + v$ gilt (D), denn: setze $U = B_{\frac{1}{2}}(x) \subseteq \mathbb{R}^m$. Für $u, v \in U$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^m$ gilt: $a_1 + u = a_2 + v \Rightarrow a_1 - a_2 = v - u$
$\Rightarrow \| a_1 - a_2 \| < 1 \Rightarrow a_1 = a_2$ weil $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^m$.

29. Theorem Sei $G$ eine Gruppe, $E$ ein top. Raum, sei $G \times E \to E$ eine Transformationsgruppe mit Eigenschaft (D). Sei $B = {_G\backslash E}$, $q: E \to B$, $q(x) = G(x)$.

Dann gilt: (a) $E \xrightarrow{q} B$ ist eine Überlagerung

(b) Wenn $E$ wegzush. ist, so gilt $\mathrm{Deck}(E \xrightarrow{q} B) = G$

(c) Wenn $E$ 1-zush. und lokal wegzush. ist, so gilt $\pi_1(B, v) \cong G$ für jedes $v \in B$.

Beweis (a) Sei $x \in E$ beliebig, sei $U \subseteq E$ offene Umgebung von $x$ wie in (D). Sei $V \subseteq U$ offen. Dann gilt $q^{-1} q(V) = \bigcup_{g \in G} g(V)$ offen $\leadsto$ $q(V) \subseteq B$ offen.

Wegen (D) ist $q|_U : U \to q(U)$ injektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismus. Betrachte

$$h : G \times U \to E_{q(U)} = \bigcup_{g \in G} g(U), \quad (g,u) \mapsto g(u)$$

$\leadsto$ $h$ offen, stetig, bijektiv also Homöomorphismus.

Damit

$$\begin{tikzcd}
G \times U \arrow[r] \arrow[d, "pr_2"] & E_{q(U)} \arrow[dd, "q"] \\
U \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
q(U) \arrow[r, equal] & q(U)
\end{tikzcd}$$

$\leadsto$ Trivialisierung.

(b) Für jedes $g \in G$ gilt $q(g(x)) = q(x)$, also $G \subseteq \mathrm{Deck}(E \xrightarrow{q} G)$. Zu jedem $u, w \in E$ mit $q(u) = q(w)$ gibt es ein $g \in G$ mit $g(u) = w$, nach § 4.22 folgt $G = \mathrm{Deck}(E \xrightarrow{q} G)$. □

(c) folgt aus § 4.27.

<u>Beispiele</u> (a) $G = \mathbb{Z}^m$, $E = \mathbb{R}^m$, $B = {}_{\mathbb{Z}^m}\backslash\mathbb{R}^m$

$\pi_1(B, v) \cong \mathbb{Z}^m$, insbesondere $\pi_1({}_{\mathbb{Z}}\backslash\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$.

Betrachte weiter

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{T}^m \\ {}_{\mathbb{Z}^m}\backslash\mathbb{R}^m \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

m-Torus

$p(t_1, \dots, t_m) = (\cos(2\pi t_1), \sin(2\pi t_1), \cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2), \dots, \cos(2\pi t_m), \sin(2\pi t_m))$

$f$ stetig, bijektiv $\Rightarrow$ ${}_{\mathbb{Z}^m}\backslash\mathbb{R}^m$ Hausdorffsch

$\Rightarrow$ ${}_{\mathbb{Z}^m}\backslash\mathbb{R}^m$ kompakt, denn $q([0,1]^m) = {}_{\mathbb{Z}^m}\backslash\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ $f$ ist ein <u>Homöomorphismus</u>, $\pi_1(T, v) = \mathbb{Z}^m$

$T \cong \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{m}$

(b) $G = \{\pm 1\}$ $E = \mathbb{S}^m$ $(a, v) \mapsto a \cdot v$

erfüllt (D) mit $U = B_{\frac{1}{2}}(x) \cap \mathbb{S}^m$ $x \in \mathbb{S}^m$

$\Rightarrow \pi_1({}_{\{\pm1\}}\backslash\mathbb{S}^m, v) \cong \mathbb{Z}/2 \cong \{\pm 1\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^m \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbb{R}P^m \\ {}_{\{\pm1\}}\backslash\mathbb{S}^m \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$p(u) = p\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \underbrace{u u^T}_{\text{symm. Matrix}} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$

$p(u)(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathbb{R} \cdot u$

$\Rightarrow f$ stetig und bijektiv

$\Rightarrow {}_{\{\pm1\}}\backslash\mathbb{S}^m$ kompakt, $\mathbb{R}P^m$ reeller Projektiver Raum.

**Bem.** Zu jeder Gruppe gibt es einen kontrahierbaren Raum $E = E_G$ und eine Wirkung $G \times E \to E$ mit (D).

Insbesondere ist jede Gruppe $G$ Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes $B = B_G$, zu einer Überlagerung

$$E_G \to B_G \quad (E_G \text{ 1-zush., lokal wegzush.})$$

Damit lassen sich Gruppen mit Topologie untersuchen.

$\to$ Geometrische Gruppentheorie