§3 Zusammenhang, Quotienten und Funktionenräume

1. <u>Def.</u> Ein topologischer Raum X <u>heißt zusammenhängend</u>, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen <u>und</u> abgeschlossenen Teilmengen von X sind. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn Y in der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

<u>Bsp.</u>
- $\{0,1\}$ ist nicht zusammenhängend (in der diskreten Topologie)
- in der Klumpentopologie ist jedes X zusammenhängend
- $\mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend, z.B. gilt $A = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.

2. <u>Satz</u> Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist zusammenhängend

(ii) sind $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$, so folgt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

(iii) jede stetige Abbildung $\varphi : X \to \{0,1\}$ ist konstant.

Beweis $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$: Sei $A \subseteq X$ offen und abg., $A \neq \emptyset, X$. Setze $U = A$, $V = X - U$.

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(iii)$: Seien $U, V \subseteq X$ offen, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$, $U \neq \emptyset, X$. Definiere $\varphi : X \to \{0,1\}$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \in V \end{cases}.$$

Dann ist φ stetig nach §1.12.

$\neg(iii) \Rightarrow \neg(i)$: Sei $\varphi : X \to \{0,1\}$ stetig und nicht konstant. Setze $U = \varphi^{-1}(1)$, $V = \varphi^{-1}(0)$. $\square$

Korollar A Ist $f : X \to Y$ stetig und ist X zush., so ist $f(X) \subseteq Y$ auch zush.

Beweis OE $f(X) = Y$ (ersetze Y durch $f(X)$)

Ist $\varphi : Y \to \{0,1\}$ nicht konstant, so auch $\varphi \circ f : X \to \{0,1\}$ nicht konstant. $\square$

Korollar B Ist X ein top. Raum, $Y \subseteq X$ zush., so ist auch $\overline{Y} \subseteq X$ zush.

Beweis Sei $\varphi : \overline{Y} \to \{0,1\}$ stetig. Dann ist $\varphi|_Y$ konstant und $\varphi(\overline{Y}) \subseteq \overline{\varphi(Y)} = \varphi(Y)$ $\square$

<u>Korollar C</u> Sei X ein top. Raum, sei $z \in X$ sowie $C(z) = \bigcup \{ Y \mid Y \subseteq X \text{ zush. mit } z \in Y \}$

Dann gilt $z \in C(z)$ und $C(z)$ ist abg. und zusammenhängend. Man nennt $C(z)$ die <u>Zusammenhangskomponente von z</u>.

<u>Bew:</u> $\{z\}$ ist zush $\Rightarrow$ $z \in C(z)$. Sei $\varphi : C(z) \to \{0,1\}$ stetig. Für jedes $y \in C(z)$ gibt es Y zush. mit $z, y \in Y \Rightarrow \varphi(z) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi = \text{const}$. Also ist $C(z)$ zush und damit $\overline{C(z)} \subseteq C(z)$, also $C(z) = \overline{C(z)}$. □

<u>Korollar D</u> Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist zush.

<u>Bew:</u> Sei $u, v \in I$, OE $u < v$, sei $\varphi : I \to \{0,1\}$ stetig. Wenn $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz (Analysis I) ein $w \in [u, v]$ mit $\varphi(w) = \frac{1}{2}$ ↯ Also ist $\varphi = \text{const}$. □

<u>Bem</u> Ein topol. Raum X heißt <u>total unzusammenhängend</u>, wenn für jedes $z \in X$ gilt: $C(z) = \{z\}$.

<u>Beispiele:</u> diskrete top. Räume, $\mathbb{Q}$, $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sind total unzush.

3. <u>Satz</u> Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Räumen, $J \neq \emptyset$, alle $X_j \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent: (i) $\prod_{j\in J} X_j = X$ ist zush.

(ii) alle X_j sind zush.

<u>Beweis</u> <u>(i) => (ii)</u>: X zush $\Rightarrow$ $X_j = pr_j(X)$ auch zush. nach §3.2.

<u>(ii) => (i)</u>: (a) <u>Das ist wahr, wenn $J = \{1,2\}$.</u>

<u>Denn</u>: Sei $(u_1,u_2), (v_1,v_2) \in X_1 \times X_2$.

Dann ist $(u_1,u_2) \in \underbrace{\{u_1\} \times X_2}_{\text{zush}} \ni (u_1,v_2) \in \underbrace{X_1 \times \{v_1\}}_{\text{zush}} \ni (v_1,v_2)$

Ist also $\varphi: X_1 \times X_2 \to \{0,1\}$ stetig, so folgt

$\varphi(u_1,u_2) = \varphi(u_1,v_2) = \varphi(v_1,v_2) \Rightarrow \varphi = \text{const}.$

(b) <u>Das ist wahr, wenn J endlich ist.</u>

Mit Induktion, $\# J \leq 2$ wurde schon gezeigt.

$$X = \underbrace{X_1}_{\text{zush}} \times \underbrace{\prod_{j=2}^{m} X_j}_{\text{zush}} \Rightarrow X \text{ zush nach (a)}.$$

(c) J beliebige unendliche Menge

Sei $z = (z_j)_{j \in J} \in X$. Für $\emptyset \neq K \subseteq J$ endlich

setze $Y_K = \{ y \in X \mid y_k = z_k$ für alle $k \in J - K \}$

$\cong \prod_{k \in K} X_k \Rightarrow Y_K$ zush. nach (b).

Daher $C(z) \supseteq Y_K$, also

$$C(z) \supseteq \overline{\bigcup \{ Y_K \mid \emptyset \neq K \subseteq J \text{ endlich} \}} \overset{!}{=} \prod_{j \in J} X_j$$

denn: $w \in \prod_{j \in J} X_k$ beliebig, W Umgebung von w

$\Rightarrow w \in \prod_{j \in J} U_j \subseteq W$ mit $U_j \subseteq X_j$ offen, $U_k = X_k$

für alle $k \in J - K$, $K \subseteq J$ endlich $\Rightarrow W \cap Y_K \neq \emptyset$

$\Rightarrow w \in \overline{\bigcup \{ Y_K \mid \emptyset \neq K \subseteq J \text{ endlich} \}}$. $\square$

4. Def Sei X ein topologischer Raum, sei Z eine Menge und sei $q : X \to Z$ eine Abbildung. Wir definieren eine Topologie $\mathcal{T}_q$ auf Z wie folgt:

$$\mathcal{T}_q = \{ U \subseteq Z \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ ist offen} \}.$$

Bezüglich dieser Topologie ist $q : X \to Z$ stetig.

Man nennt $\mathcal{T}_q$ die <u>Quotiententopologie</u> bezüglich q, und Z einen Quotientenraum.

<u>Beweis, dass $\mathcal{T}_q$ eine Topologie ist.</u>

$$q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_q \qquad q^{-1}(Z) = X \Rightarrow Z \in \mathcal{T}_q$$

Ist $\mathcal{C}$ eine Menge von Teilmengen von Z, so gilt

$$q^{-1}(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{ q^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C} \}$$

$$q^{-1}(\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap \{ q^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C} \}$$

daraus folgt sofort, dass (Top 2) und (Top 3) gelten. $\square$ #

5\. <u>Satz</u> Seien X, Y top. Räume, sei $f : X \to Y$ stetig. Sei Z eine Menge, $q : X \to Z$ eine Abbildung. Wenn es eine Abbildung $h : Z \to Y$ gibt mit $h \circ q = f$, dann ist h stetig bzgl. der Quotiententopologie auf Z.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "\text{stetig}"'] \arrow[d, "q"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "h", "\text{auch stetig!}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Sei $W \subseteq Y$ offen, zeige, dass $h^{-1}(W) \subseteq Z$ offen ist. $q^{-1}(h^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ ist offen (weil f stetig), also ist $h^{-1}(W)$ offen. $\square$

6. <u>Erinnerung</u>: eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen top. Räumen heißt <u>offen</u> (bzw <u>abgeschlossen</u>) wenn für alle $U \subseteq X$ offen auch $f(U) \subseteq Y$ offen ist (bzw für alle $A \subseteq X$ abg. auch $f(A) \subseteq Y$ abg.)

<u>Satz</u> Seien X, Z topologische Räume, sei $q: X \to Z$ surjektiv und stetig. Falls q offen ist (oder falls q abg. ist), so trägt Z die Quotiententopologie.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq Z$ mit $q^{-1}(U)$ offen.
Dann gilt $U = q(q^{-1}(U))$ (weil q surjektiv ist)
also ist U offen, falls q offen ist.
Falls q abg. ist, betrachte $A = X - q^{-1}(U)$, dann ist $q(A) = Z - U$ abg, also ist U offen. $\square$

<u>Korollar</u> Sei ~~f:~~ $q: X \to Z$ stetig und surjektiv. Falls X kompakt ist und Z Hausdorffsch, so ist trägt Z die Quotiententopologie.

<u>Beweis</u> Ist $A \subseteq X$ abg., so ist $q(A) \subseteq Y$ kompakt, also abg. Daher ist q abgeschlossen. $\square$

Ist $q: X \to Z$ stetig und surjektiv und trägt Z die Quotiententopologie, so nennt man q eine <u>Quotientenabbildung</u>

7. Beispiele

(a) $X = C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Cantormenge, $Z = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

$x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ $\quad q(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot x_j \quad \rightsquigarrow \quad 0 \le q(x) \le \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 1$

q <u>ist stetig</u>: Sei $\varepsilon > 0$, wähle m mit $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

Ist $x_j = z_j$ für $j = 0, \dots, m-1$, so ist $|q(x) - q(z)| \le \frac{1}{2} \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j}$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

q <u>ist surjektiv</u>: sei $r \in [0,1]$, sei $\varepsilon > 0$. Wähle m mit $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Dann gibt es $k \le m$ mit $k 2^{-m} \le r < (k+1) \cdot 2^{-m}$

$\rightsquigarrow |k \cdot 2^{-m} - r| < \varepsilon$ und $k \cdot 2^{-m} \in q(C)$. Es folgt

$[0,1] = \overline{q(C)}$, aber $q(C)$ ist kompakt, also abgeschlossen. $\square$

(b) $(\mathbb{R}, +)$ Gruppe mit Untergruppe $\mathbb{Q}$, Nebenklassen $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ $:= \{r + \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{R}\}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Die Quotiententop. auf $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist die <u>Klumpentopologie</u>, denn: ist $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $U = (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $q(U) = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

⌜ Zu jedem $s \in \mathbb{R}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $s + q \in U$

$\rightsquigarrow q(s) \in q(U)$ ⌟

Beachte: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist eine überabzählbare abelsche Gruppe.

Dieser Quotientenraum ist <u>nicht</u> schön.

8. <u>Lemma</u> Sei $q: X \to Z$ stetig, surjektiv und offen, sei $R = \{(a,b) \in X \times X \mid q(a) = q(b)\}$. Wenn $R \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist, so ist Z ein Hausdorff-Raum (vgl. § 2.3 Satz A).

<u>Beweis</u> Sei $u, v \in X$ mit $q(u) \neq q(v)$. Dann gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $u \in U$, $v \in V$, $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Dann sind $q(U), q(V) \subseteq Z$ offen und disjunkt. $\square$

9. <u>Konstruktion</u> (<u>Anheften von topologisch Räumen</u>)

Seien X, Y top. Räume, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, sei $f: A \to Y$ stetig (und sei $X \cap Y = \emptyset$).

Wir definieren
$$Z = Y \cup (X - A)$$
$$S = X \sqcup Y \quad \text{(disjunkte Vereinigung)}$$

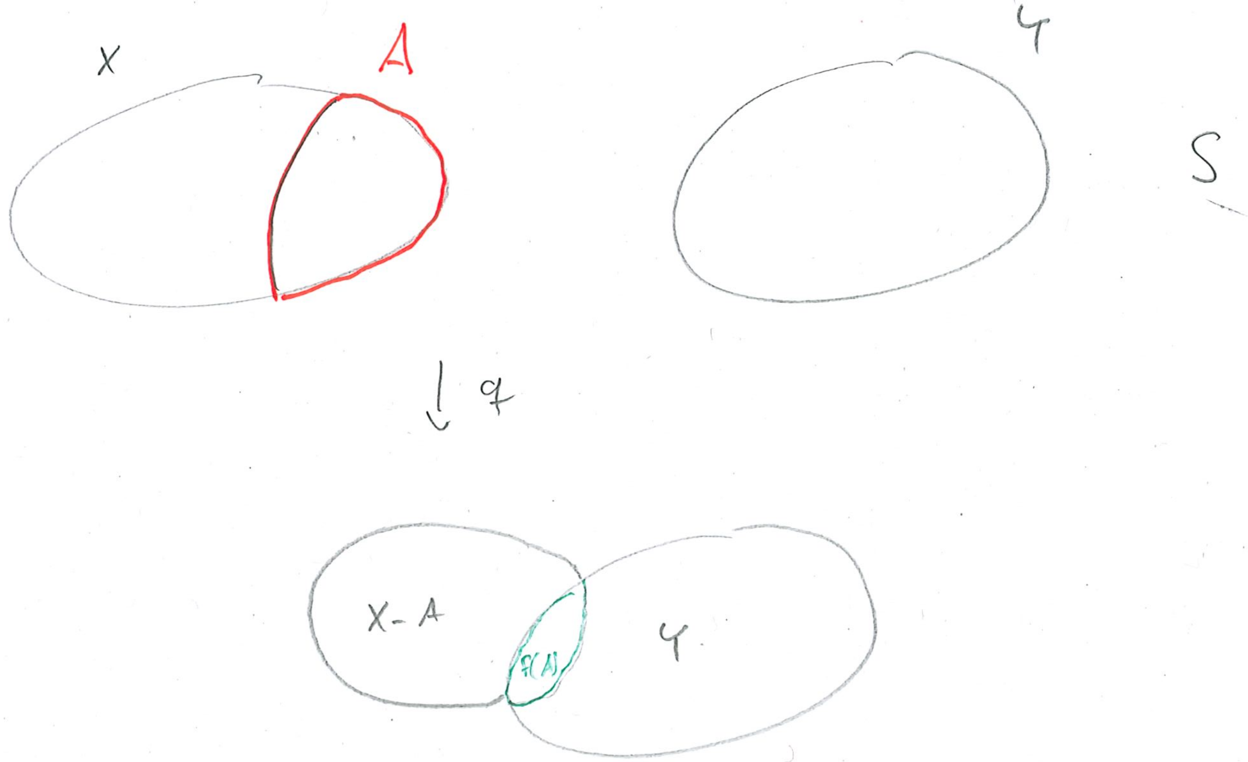
Topologie auf S: $W \subseteq S$ offen $\Leftrightarrow$ $W \cap X$ offen <u>und</u> $W \cap Y$ offen
vgl. ÜA 4.1

(<u>Koprodukt</u> von X und Y)

sowie $q: S \to Z$, $q(s) = \begin{cases} s & \text{falls } s \in Y \\ s & \text{falls } s \in X - A \\ f(s) & \text{falls } s \in A \end{cases}$

und versehen Z mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_q$.

Man schreibt $Z = Y \cup_f X$ und sagt, man <u>heftet</u> <u>X durch f an Y an.</u>



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "q|_Y"] \\ X \arrow[r, "q|_X"'] & Z \end{tikzcd}$$

$Z = Y \cup_f X$ heißt auch <u>push-out</u> von $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \end{tikzcd}$

<u>Eigenschaften von Z.</u>

(i) $q|_Y : Y \to Z$ ist stetig, abgeschlossen und injektiv

(ii) $q|_{X-A} : X-A \to Z$ ist stetig, offen und injektiv

(iii) Wenn X, Y T_1-Räume sind, so ist Z auch T_1-Raum

<u>Beweis</u> $q|_Y$ und $q|_{X-A}$ sind stetig und injektiv nach Konstruktion. Ist $W \subseteq X-A$ offen, so ist $q^{-1}(q(W)) = W$, also ist $q(W) \subseteq Z$ offen. Ist $B \subseteq Y$ abg., so ist $q^{-1}(q(B)) = B \cup f^{-1}(A) \subseteq S$ abg, also ist $q(B)$ abg.

Für $z \in Z$ ist $q^{-1}(z) \subseteq X \cup Y$ abgeschlossen, denn:

$z \in X - A \rightsquigarrow q^{-1}(z) = \{z\}$ abg.
$z \in Y - f(A) \rightsquigarrow q^{-1}(z) = \{z\}$ abg.
$z \in f(A) \rightsquigarrow q^{-1}(z) = f^{-1}(z) \cup \{z\}$ abg. $\square$

10. <u>Satz</u> Wenn X, Y normale Räume sind (T_4), so ist auch $Z = Y \cup_f X$ normal. Dabei sei $A \subseteq X$ abg. und $f: A \to Y$ stetig.

<u>Beweis</u> Wir benutzen den Satz von Tietze §2.8.

Sei $B \subseteq Z$ abg, $\varphi: B \to [0,1]$ stetig. Zu zeigen ist, dass es eine stetige Fortsetzung $\Phi: Z \to [0,1]$ gibt.

Betrachte $q^{-1}(B) = (q^{-1}(B) \cap X) \cup \underbrace{(q^{-1}(B) \cap Y)}_{= B \cap Y}$.

Da $B \cap Y \subseteq Y$ abg. ist, gibt es (nach Tietze) $\psi: Y \to [0,1]$ stetig mit $\psi|_B = \varphi$. Wir definieren $\psi(a) = \psi(f(a)) = \varphi(q(a))$ für $a \in A$.

Für $x \in q^{-1}(B) \cap X$ setzen wir $\psi(x) = \varphi(q(x))$. Ist $x \in q^{-1}(B) \cap A$, so ist $\varphi(q(a)) = \psi(q(a))$, also ist ψ wohldefiniert. Weiter ist ψ stetig auf $q^{-1}(B) \cup Y \cup A$ nach §1.12. Wir setzen ψ fort auf $X \cup Y$ mit Tietze, $\psi: S = X \cup Y \to [0,1]$. Weiter definieren wir

$\Phi: Z \to [0,1]$ durch

$$\Phi(z) = \begin{cases} \psi(z) & \text{falls } z \in Y \\ \psi(z) & \text{falls } z \in X - A \\ \varphi(z) & \text{falls } z \in A \end{cases}$$

Dann gilt $\Phi \circ q = \psi$

$$\begin{tikzcd} X \cup Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & {[0,1]} \\ Z \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

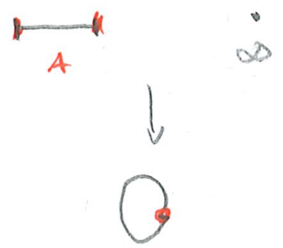
also ist Φ stetig nach § 3.5. Für $b \in B \cap Y$ ist $\Phi(b) = \varphi(b)$ und für $b \in B \cap (X - A)$ ist $\Phi(b) = \varphi(b)$, also $\Phi|_B = \varphi$. $\square$

<u>Beispiel</u> $Y = \{\infty\}$, $X = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\| \leq 1 \}$

$A = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\| = 1 \} \cong S^{m-1}$ Sphäre

$f : A \to Y$ konstant.

<u>Beh</u> $Z = Y \cup_f X = S^m$



Definiere

$$\begin{tikzcd} X \cup Y \arrow[r, "h"] \arrow[d] & S^m \\ Z \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

stetig!

$h(v_1, \ldots, v_m) = \left(\cos(\pi\|v\|), \frac{v_1}{\|v\|} \cdot \sin(\pi\|v\|), \ldots, \frac{v_m}{\|v\|} \cdot \sin(\pi\|v\|)\right)$

$h(\infty) = (-1, 0, \ldots 0)$

Dann ist H stetig und bijektiv, Z ist kompakt, also

$H : Z \to S^m$ ein Homöomorphismus. $\square$

Ein <u>CW-Komplex</u> ist (grob gesagt) ein Raum, der sukzessives Kleben von n-Zellen $e^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ längs ihrer Ränder $\dot{e}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ entsteht → algebraische Topologie. CW-Komplexe sind normal.

11. <u>Def / Erinnerung</u> Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, sei $C_b(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$

Für $f \in C_b(X,\mathbb{R})$ definieren wir die <u>Supremumsnorm</u>

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(u)| \mid u \in X\}$. Das ist eine Norm:

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$|f(u) + g(u)| \leq |f(u)| + |g(u)|$, also $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$|c \cdot f(u)| = |c|\,|f(u)| \Rightarrow \|c \cdot f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$.

Die Metrik auf $C_b(X,\mathbb{R})$ ist $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

<u>Satz</u> Ist $X \neq \emptyset$, so ist $C_b(X,\mathbb{R})$ ein <u>Banachraum</u>, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.

<u>Beweis</u> Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Für jedes $u \in X$ ist dann $|f_k(u) - f_\ell(u)| \leq \|f_k - f_\ell\|_\infty$, also ist $(f_k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, mit Grenzwert $f(u) = \lim_{k\in\mathbb{N}} f_k(u)$.

<u>Beh</u> <u>Die so definierte Funktion f ist beschränkt, stetig und</u>

<u>$\lim_k \|f - f_k\|_\infty = 0.$</u>

<u>Denn</u>: Es gibt $m \geq 0$ so, dass $\|f_k - f_m\|_\infty \leq 1$ für alle $k \geq m \Rightarrow \|f_k\|_\infty \leq \|f_m\|_\infty + 1 \rightsquigarrow |f(u)| \leq \|f_m\|_\infty + 1$.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $m \geq 0$ so, dass $\|f_k - f_l\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k, l \geq m$.

Da f_m stetig ist, gibt es zu jedem $u \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ mit $|f_m(u) - f_m(v)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $v \in U$. Damit

$$|f_k(u) - f_k(v)| \leq |f_k(u) - f_m(u)| + |f_m(u) - f_m(v)| + |f_m(v) - f_k(v)|$$
$$\leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq m,\ v \in U$$

$\Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ für alle $v \in U$.

Also ist f beschränkt und stetig. Schließlich gilt

$$|f_k(u) - f_l(u)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(u) - f_l(u)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } l \geq m$$

$\Rightarrow \|f - f_l\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $l \geq m$. $\square$

12. <u>Def</u> Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ heißt <u>gleichgradig stetig in $u \in X$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von u gibt so, dass für <u>alle</u> $f \in \mathcal{F}$, $v \in U$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$

(<u>ein</u> U für alle $f \in \mathcal{F}$).

Falls $\mathcal{F}$ in <u>jedem</u> $u \in X$ gleichgradig stetig ist, so heißt $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

13. Theorem (Satz von Arzelà-Ascoli)

⌜ C. Arzelà, 1847-1912 } italienische Mathematiker
G. Ascoli, 1843-1896 ⌟

Sei X kompakt und $\mathcal{F} \subseteq C(X,\mathbb{R}) = C_b(X,\mathbb{R})$.

Dann sind äquivalent:

(i) $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ ist kompakt.

(ii) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig und für jedes $u \in X$ ist $\{f(u) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn $\overline{\mathcal{F}}$ kompakt ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ mit $\overline{\mathcal{F}} \subseteq B_\varepsilon(f_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(f_m)$

✱ Für $u \in X$ ist dann $\{f(u) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq \underbrace{B_\varepsilon(f_1(u)) \cup \dots \cup B_\varepsilon(f_m(u))}_{\text{beschränkt.}} \subseteq \mathbb{R}$

Weiter gibt es eine Umgebung U von u so, dass

$$|f_j(v) - f_j(u)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } v \in U,\ j = 1, \dots, m.$$

Für $f \in B_\varepsilon(f_j)$ folgt dann

$$|f(v) - f(u)| \le |f(v) - f_j(v)| + |f_j(v) - f_j(u)| + |f_j(u) - f(u)| \le 3\varepsilon$$

□

(*) Ein alternatives und schöneres Argument:

Für jedes $u \in X$ ist die Auswertungsabbildung
$ev_u : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(u) = ev_u(f)$ stetig
(wegen $|f(u)| \leq \|f\|_\infty$), also ist $ev_u(\overline{F}) = \{ f(u) \mid f \in \overline{F} \} \subseteq \mathbb{R}$
kompakt, damit beschränkt. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für jedes $\varepsilon > 0$, $u \in X$ sei $U(u,\varepsilon) \subseteq X$ offen so, dass $|f(y) - f(u)| \leq \varepsilon$ für alle $f \in F$, $y \in U(u,\varepsilon)$ gilt.

Weiter sei $I_u = [-a, a] \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $\{ f(u) \mid f \in F \} \subseteq I_u$ gilt.

Dann ist $\prod_{u \in X} I_u \subseteq \mathbb{R}^X$ kompakt (Tychonov) mit $F \subseteq \prod_{u \in X} I_u$. Sei

$$E = \left\{ h \in \prod_{u \in X} I_u \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für alle } \varepsilon > 0, \text{ alle } u \in X, \text{ alle } y \in U(u,\varepsilon) \\ \text{ist } |h(y) - h(x)| \leq \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$= \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ u \in X \\ y \in U(u,\varepsilon)}} \underbrace{\left\{ h \in \prod_{v \in X} I_v \;\middle|\; |h(y) - h(x)| \leq \varepsilon \right\}}_{\text{abg}} \text{ abg.}$$

in der Produkttopologie, also ist E kompakt mit $F \subseteq E$.

Weiter gilt für alle $h \in E$, dass h stetig ist.

<u>Beh</u>: <u>Die Inklusionsabbildung $\iota : E \to C(X, \mathbb{R})$ ist stetig</u>.

Sei $h \in E$, sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $u_1, \dots, u_m \in X$ mit $U(u_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U(u_m, \varepsilon) = X$. Ist $f \in E$ mit $|f(u_j) - h(u_j)| \leq \varepsilon$ für $j = 1, \dots, m$, so folgt

$|f(u) - h(u)| \leq 3 \cdot \varepsilon$ für alle $u \in X$, also $\|f - h\|_\infty \leq 3 \cdot \varepsilon$.

Daher ist $\iota : E \to C(X, \mathbb{R})$ stetig bzgl $\|\cdot\|_\infty$.

Insbesondere ist $\iota(E) \subseteq C(X, \mathbb{R})$ kompakt, also ist $\overline{F} \subseteq \iota(E)$ auch kompakt

$\square$

14. Eine Anwendung: Peanos Satz

Theorem (Peano) Sei $F : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf $(0,1)$ mit $\gamma(0) = c$ und $\underbrace{F(t,\gamma(t)) = \gamma'(t)}_{\text{gewöhnliche DGL}}$ für alle $t \in (0,1)$

Beweis Umschreiben in Integralgleichung:

$$\gamma(t) = c + \int_0^t F(s,\gamma(s))\,ds, \quad \text{gesucht ist } \gamma.$$

Definiere

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} c & \text{für } t \le 0 \\ c + \int_0^t \underbrace{F(s,\gamma_n(s-2^{-n}))\,ds}_{\text{wohldefiniert wegen Zeitverzögerung!}} & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Wegen $|F(s,r)| \le K$ für eine Konstante $K \in \mathbb{R}$

folgt $|\gamma_n(u) - \gamma_n(v)| \overset{(1)}{\le} K\cdot|u-v|$ (MWS der Integralrechnung)

insbesondere $|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)| \overset{(2)}{\le} K$ für $0 \le t \le 1$.

Die Familie $\{\gamma_n|_{[0,1]} \mid n = 1,2,3,\dots\}$ ist gleichgradig stetig nach (1) und $\{\gamma_n(t) \mid n = 1,2,3\}$ ist beschränkt nach (2).

hat also kompakten Abschluss in $C([0,1],\mathbb{R})$.

Da $C([0,1],\mathbb{R})$ ein metrischer Raum ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{\gamma_{n_k} \mid k=0,1,2,\dots\}$ mit Grenzwert γ, $\lim_k \|\gamma-\gamma_{n_k}\|_\infty = 0$.

Die Abbildung
$$\hat F : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R}),\quad \alpha \mapsto [t \mapsto F(t,\alpha(t))]$$
ist stetig, denn: zu $\alpha \in C([0,1],\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ gibt es $W \subseteq [0,1]\times\mathbb{R}$ offen mit

(1) $(t,\alpha(t)) \in W$ für alle t

(2) $|F(t,v) - F(t,\alpha(t))| \le \varepsilon$ für alle $(t,v) \in W$

Nach Wallace's Lemma § 2.15 gibt es $\delta > 0$ so, dass gilt: $\|\beta-\alpha\|_\infty \le \delta \Rightarrow (t,\beta(t)) \in W$ für alle $t \in [0,1]$ $\Rightarrow$ Folgt $\|\hat F(\alpha) - \hat F(\beta)\|_\infty \le \varepsilon$, also ist $\hat F$ stetig.

Insgesamt: $\lim_k \|\hat F(\gamma) - \hat F(\gamma_{n_k})\|_\infty = 0$, damit

(glm. Konvergenz $\Rightarrow$ MWS) $$\lim_k \left(c + \int_0^t F(s,\gamma_{n_k}(s-2^{-n_k}))\,ds\right) = c + \int_0^t F(s,\gamma(s))\,ds \qquad \square$$

Im Gegensatz zum Satz von Picard-Lindelöf sagt der Satz von Peano <u>nicht</u>, dass die Lösung γ eindeutig ist. Picard-Lindelöf besagt zusätzlich Eindeutigkeit, allerdings mit der stärkeren Annahme, dass F (lokal) <u>Lipschitz-stetig</u> ist ($\to$ Gewöhnliche DGL).

Beispiel $F(t,u) = 2\sqrt{|u|}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma' = 2\sqrt{|\gamma|}$ DGL

Anfangswert $c = 0 = \gamma(0)$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar auf $(0,1)$

Lösungen: $\gamma_r(t) = \begin{cases} 0 & t \le r \\ (t-r)^2 & t > r \end{cases}$ für alle $r \in [0,1]$

$\Rightarrow$ keine eindeutige Lösung.

(F ist nicht Lipschitz-stetig).

15. Lemma (Satz von Dini) Sei X kompakt, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X,\mathbb{R})$, die punktweise gegen $f \in C(X,\mathbb{R})$ konvergiert (d.h. $\lim_{k\in\mathbb{N}} f_k(u) = f(u)$ für alle $u \in X$). Falls für jedes $u \in X$ die Folge $(f_k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigt, so konvergiert die Folge sogar gleichmäßig, d.h. $\lim_k \|f - f_k\|_\infty = 0$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $u \in X$ gibt es ein $m(u) \in \mathbb{N}$ so, dass $f_k(u) > f(u) - \varepsilon$ für alle $k \ge m(u)$. Setze $V(u) = \{ v \in X \mid f_{m(u)}(v) > f(v) - \varepsilon \}$. Dann ist $V(u)$ offene Umgebung von u. Da X kompakt ist, gibt es $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}$ mit $X = V(u_1) \cup \dots \cup V(u_n)$. Setze $m = \max\{ m(u_1), \dots, m(u_n) \}$. Dann gilt

$f_m(w) > f(w) - \varepsilon$ für alle $w \in X$, also

$f_k(w) > f(w) - \varepsilon$ für alle $w \in X, k \ge m$, also

$\|f_k - f\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $k \ge m$. $\square$

Korollar Sei $X = [0,1]$, $P_0(t) = 0$,

$P_{k+1}(t) = \frac{1}{2}(P_k(t)^2 + t)$. Dann gilt

$$\lim_k \| P_k - f \|_\infty = 0 \quad \text{für } f = 1 - \sqrt{1-t}$$

Beweis Mit Induktion nach k gilt $1 \geq P_k(t) \geq 0$ für $0 \leq t \leq 1$.

Weiter $P_{k+2}(t) - P_{k+1}(t) = \frac{1}{2}(P_{k+1}(t)^2 - P_k(t)^2)$, wegen

$P_1(t) = \frac{1}{2}t \geq P_0(t) = 0$ rekursiv $P_{k+1}(t) \geq P_k(t)$.

Daher existiert $\lim_k P_k(t) = f(t)$, mit $1 \geq f(t) = \frac{1}{2}(f(t)^2 + t) \geq 0$

$\leadsto f(t)^2 - 2f(t) + t = 0 \leadsto f(t) = \frac{2 - \sqrt{4-4t}}{2}$

$= 1 - \sqrt{1-t}$ $\square$

16. Der Satz von Stone-Weierstraß

Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter top. Raum. Dann ist $C(X,\mathbb{R})$ ein Banachraum bzgl $\|.\|_\infty$ und ein kommutativer Ring (bzgl. punktweiser Multiplikation von Funktionen).

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilring von $C(X,\mathbb{R})$ auf, $r \in \mathbb{R}$ entspricht der konstanten Funktion $u \mapsto r$.

Lemma A Sei $R \subseteq C(X, \mathbb{R})$ ein Teilring. Dann ist auch der Abschluss $\overline{R} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ ein Teilring.

Beweis Für $f,h \in C(X,\mathbb{R})$ definiere wir

$$a(f,h) = f+h \qquad m(f,h) = f \cdot h$$
$$i(f) = -f$$

Multiplikation

Dann sind a, m, i stetige Abbildungen, also gilt

$$a(\overline{R \times R}) = a(\overline{R} \times \overline{R}) \subseteq \overline{R}$$
$$m(\overline{R \times R}) = m(\overline{R} \times \overline{R}) \subseteq \overline{R}$$
$$i(\overline{R}) \subseteq \overline{R}$$

□

Lemma B Sei $R \subseteq C(X,\mathbb{R})$ ein abg. Teilring, mit $\mathbb{R} \subseteq R$. Für jedes $f \in R$ gilt dann $|f| \in R$, für $f_1, \dots, f_n \in R$ ist $\max\{f_1,\dots,f_n\} \in R$, $\min\{f_1,\dots,f_n\} \in R$.

Beweis (a) Sei $f \in R$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Definiere h_k rekursiv durch

$$h_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\left(h_k(x)^2 - (1-f(x))^2\right)$$
$$h_0 = 0$$

⇝ $h_k \in R$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Dini und dem Korollar gilt

$$\lim_k \| h_k - h \|_\infty = 0 \ , \text{ für } h(u) = 1 - \sqrt{1-(1-f(u)^2)} = 1 - \sqrt{f(u)^2} = 1 - |f|$$

also $|f| \in R$, weil $R = \overline{R}$.

(b) Ist $\|f\|_\infty > 1$, so sei $\tilde{f} = \frac{1}{\|f\|_\infty} \cdot f \overset{(a)}{\Rightarrow} |\tilde{f}| \in R$

$\leadsto |f| = \|f\|_\infty \cdot |\tilde{f}| \in R$ (weil $\mathbb{R} \subseteq R$)

(c) $\max\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|) \in R$

$\min\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|) \in \mathbb{R}$

Rest mit Induktion. $\square$

<u>Theorem</u> (<u>Satz von Stone - Weierstraß</u>) Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter top. Raum, sei $R \subseteq C(X, \mathbb{R})$ ein Teilring mit $\mathbb{R} \subseteq R$.

$\uparrow$ konstante Funktionen

Wenn es für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ ein $f \in R$ gibt mit $f(u) \neq f(v)$ ①, so gilt $\overline{R} = C(X, \mathbb{R})$

① Man sagt: R <u>trennt die Punkte</u> in X.

⌈ K. Weierstraß 1815–1897 dt. Mathematiker
M. Stone 1903–1989 amerik. Mathematiker ⌋

<u>Beweis</u> (a) Wir ersetzen R durch $\overline{R}$ (Lemma A), nehmen im Folgenden also zusätzlich an, dass R abg. ist.

Zu zeigen ist dann $R = C(X,\mathbb{R})$. □

(b) Ist $u,v \in X$, $u \neq v$, so gibt es $f \in R$ mit
$f(u) = s$, $f(v) = t$ für $s,t \in \mathbb{R}$ beliebig.

<u>Denn:</u> Wähle $h \in R$ mit $h(u) \neq h(v)$, setze

$$f(w) = s + \frac{t-s}{h(v)-h(u)}\,(h(w)-h(u)) \in R$$ □

(c) Ist $\varepsilon > 0$, $h \in C(X,\mathbb{R})$, $u \in X$, so gibt es eine Umgebung V von u und $f \in R$ mit

$|h(v) - f(v)| \leq \varepsilon$ für alle $v \in V$

$f(x) \leq h(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X$ □

<u>Denn:</u> Zu jedem $z \in X$ wähle $f_z \in R$ mit

$f_z(z) = h(z)$, $f_z(u) = h(u)$ (mit (b)).

Dann hat z eine Umgebung W_z mit $f_z(w) \leq h(w) + \varepsilon$ für alle $w \in W$.

Da X kompakt ist, gibt es $z_1, \dots, z_n \in X$ mit

$X = W_{z_1} \cup \dots \cup W_{z_n}$. Setze $f = \min\{f_{z_1}, \dots, f_{z_n}\}$
$f \in R$ nach Lemma B

$\rightsquigarrow f \leq h + \varepsilon$

Setze $V = \{ v \in X \mid f(v) \geq h(v) - \varepsilon \}$

$(f(u) = h(u))$ □

(d) Zu jedem $\varepsilon > 0$, $h \in C(X, \mathbb{R})$ gibt es $f \in R$ mit $\|h - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

<u>Denn</u>: Zu jedem u gibt es ein Umgebung $V = V_u$ von u und $f = f_u \in R$ mit

$$|h(v) - f(v)| \leq \varepsilon \quad v \in V$$
$$f(x) \leq h(x) + \varepsilon \quad x \in X$$

nach (c). Da X kompakt ist, gibt es $u_1, \dots, u_e \in X$ mit $X = V_{u_1} \cup \dots \cup V_{u_e}$. Setze $f = \max\{f_{u_1}, \dots, f_{u_e}\}$.

Es folgt $\|h - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Also ist $\bar{R} = R = C(X, \mathbb{R})$. $\square$

<u>Korollar</u> (<u>Weierstraß Approximationssatz</u>)

Sei $h \in C([a,b], \mathbb{R})$. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p mit

$\|h - p\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$