Čech-Stone Kompaktifizierung

16. <u>Def.</u>: Ein T_1-Raum X heißt <u>Tychonoff Raum</u> oder <u>vollständig regulär</u> oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn gilt:
Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und jedes $p \in X - A$ gibt es $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $\varphi|A = 1$ und $\varphi(p) = 0$ (also eine $(\{p\}, A)$-Urysohn-Funktion)

<u>Bem.</u>: (i) $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$
(ii) Ist X $T_{3\frac{1}{2}}$ Raum, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum
($A \subseteq Y$ abgeschl, $p \in Y \setminus A$. Dann gilt $p \in X \setminus \underbrace{\overline{A}}_{\text{Abschluss in } X}$, da $\overline{A} \cap Y = A$)
Insbesondere sind Teilräume von kompakten Räumen stets vollständig regulär (da kompakt $\Rightarrow T_4$ nach §2.15, Korollar A).

<u>Bsp</u>: Kompaktifizierungen von $(0,1)$
(i) 1-Punkt Kompaktifizierung:
$$(0,1) \cong_{\text{homö.}} S^1 \setminus \{(1,0)\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$h : x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \sin 2\pi x \end{pmatrix}$$

Bem: $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ kann zu $F:S^1\longrightarrow\mathbb{R}$ erweitert werden, d.h. $f=F\circ\iota$, falls

$$f_0 := \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad f_1 := \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

existieren und $f_0 = f_1$

(ii) $(0,1)\subseteq[0,1]\subseteq\mathbb{R}$

Bem: Erweiterung von f existiert, wenn lediglich f_0, f_1 existieren.

Aufgabe: Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, finde βX kompakt mit $\iota_X : X \hookrightarrow \beta X$ Homöm. auf $\iota_X(X)$ un $\overline{\iota_X(X)} = \beta X$, sodass jede beschränkte, stetige Abbildung $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\beta f:\beta X\longrightarrow\mathbb{R}$ erweitert werden kann, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dashed, "\beta f"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

17. Konstruktion. Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Setze

$$S := C(X,[0,1]) = \{\varphi : X \longrightarrow [0,1] \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \iota_X : X &\longrightarrow [0,1]^S \\ p &\longmapsto (\varphi(p))_{\varphi \in S} \end{aligned}$$

Lemma. ι_X ist stetig, injektiv und $\iota_X : X \longrightarrow \iota_X(X)$ ist ein Homöomorphismus

Beweis. Für jedes $\varphi \in S$ ist $(pr_\varphi \circ \iota_X)(p) = \varphi(p)$ stetig, also ist ι_X stetig.

Da X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, gibt es zu $p \neq q$ ein $\varphi \in S$ mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. Insb. ist $\iota_X(p) \neq \iota_X(q)$, also ι_X inj.

Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen.

Beh.: $\overline{\iota_X(A)} \cap \iota_X(X) = \iota_X(A)$, d.h. $\iota_X(A) \subseteq \iota_X(X)$ abgeschlossen ($\Rightarrow$ Homöomorphismus aufs Bild).

Sei $p \in X \setminus A$. Dann gibt es $\varphi \in S$ mit

$\varphi(p) = 1$, $\varphi(A) \subseteq \{0\}$, da X $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

Es folgt:
$$\begin{aligned} & pr_\varphi(\iota_X(A)) \subseteq \{0\} \\ \Rightarrow\ & pr_\varphi(\overline{\iota_X(A)}) \subseteq \{0\} \\ \Rightarrow\ & \iota_X(p) \notin \overline{\iota_X(A)} \\ \Rightarrow\ & \iota_X(X \setminus A) \cap \overline{\iota_X(A)} = \emptyset. \end{aligned}$$
$\square$

Kor: Ein top. Raum X ist genau dann ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn X homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes ist.

Bew: Nach Tychonoff ist $[0,1]^S$ kompakt, und X homöomorph zu Teilraum von $[0,1]^S$. □

18. **Def**: Sei X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, $S = C(X, [0,1])$, $\imath_X : X \longrightarrow [0,1]^S$, $p \longmapsto (\varphi(p))_{\varphi \in S}$. Setze

$$\beta X := \overline{\imath_X(X)} \subseteq [0,1]^S.$$

Dann heißt $\imath_X : X \longrightarrow \beta X$ die <u>Čech-Stone Kompaktifizierung von X</u>.

(βX ist kompakt, da abgeschlossen im kompakten Raum $[0,1]^S$.)

<u>Korollar A</u>. Ist K kompakt, so ist $\imath_K : K \longrightarrow \beta K$ ein Homöomorphismus (da $\imath_K(K)$ kompakt, also abgeschlossen, folgt $\imath_K(K) = \overline{\imath_K(K)} = \beta K$).

Bem.: Für $X = \mathbb{N}$ (mit der diskreten Topologie) gilt:

$$\# \underbrace{\beta\mathbb{N}}_{\widehat{=}\text{ Menge aller Ultrafilter auf } \mathbb{N}.} = 2^{c} = 2^{2^{\aleph_0}} = |\mathfrak{P}(\mathbb{R})|$$

Satz. (Der Čech-Stone Funktor β) Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig, X, Y $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung

$$\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y,$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ Y \arrow[r, "\iota_Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bem.: Ist insb. Y kompakt, so erhalten wir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\text{eindeutige stetige Erweiterung } \beta(f) \text{ von } f \text{ auf } \beta X."] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Beweis. (i) Eindeutigkeit: Es gebe auch $h : \beta X \to \beta Y$ mit $h \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. Da $A := \{ q \in \beta X \mid h(q) = \beta f(q) \}$ abgeschlossen ($\beta X \setminus A = \{ q \in \beta X \mid h(q) \neq \beta f(q) \}$ ist offen!), folgt aus $\iota_X(X) \subseteq A$:

$$\beta X = \overline{\iota_X(X)} \subseteq A, \text{ also ist } h = \beta X.$$

(II) Existenz: Seien $S = C(X,[0,1])$, $T = C(Y,[0,1])$.
Für $\psi \in T$ ist dann $\psi \circ f \in S$. Betrachte die stetige Abbildung

$$\begin{aligned}\alpha : [0,1]^S &\longrightarrow [0,1]^T \\ (t_\varphi)_{\varphi \in S} &\longmapsto \left(pr_{\psi\circ f}\,(t_\varphi)\right)_{\psi \in T} = (t_{\psi\circ f})_{\psi\in T}\end{aligned}$$

Für $p \in X$ folgt:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, mapsto, "\iota_X"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & (\varphi(p))_{\varphi\in S} \arrow[d, mapsto, "\alpha"] \\ f(p) \arrow[r, mapsto, "\iota_Y"] & (\psi(f(p)))_{\psi\in T} \end{tikzcd}$$

, also erhalten wir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \iota_X(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"] & \beta X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "\iota_X"] & \iota_Y(Y) \arrow[r, hook] & \beta Y \end{tikzcd},$$

$$\alpha\Big|_{\beta X}^{\beta Y} =: \beta f$$

□

da $\alpha(\beta X) = \alpha(\overline{\iota_X(X)}) \subseteq \overline{\alpha(\iota_X(X))} \subseteq \overline{\iota_Y(Y)} = \beta Y$
aufgrund der Stetigkeit von α.

Setze $\beta f := \alpha\Big|_{\beta X}^{\beta Y} : \beta X \longrightarrow \beta Y$.

□

<u>Korollar B</u> (Die universelle Eigenschaft der Čech-Stone Kompaktifizierung).

Sei X ein Tychonov-Raum, K kompakt, $f: X \to K$ stetig. Dann gibt es genau einen stetigen Homöomorphismus

$$\beta(f) : \beta X \longrightarrow K \quad \text{mit} \quad \beta(f) \circ \iota_X = f,$$

d.h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, "\exists!\, \beta(f)"] \\ K & \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>: Wir haben

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d] & \beta X \arrow[d, "\beta f\ \exists!"] \arrow[dl, dotted, "\beta(f)"'] \\ K \arrow[r, "\iota_K"', "\text{Homöom.}"] & \beta K \end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Bem</u>: Man unterscheidet nicht zwischen $\beta(f)$ und βf.